N° d'ordre 409

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

pour l'obtention

du grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

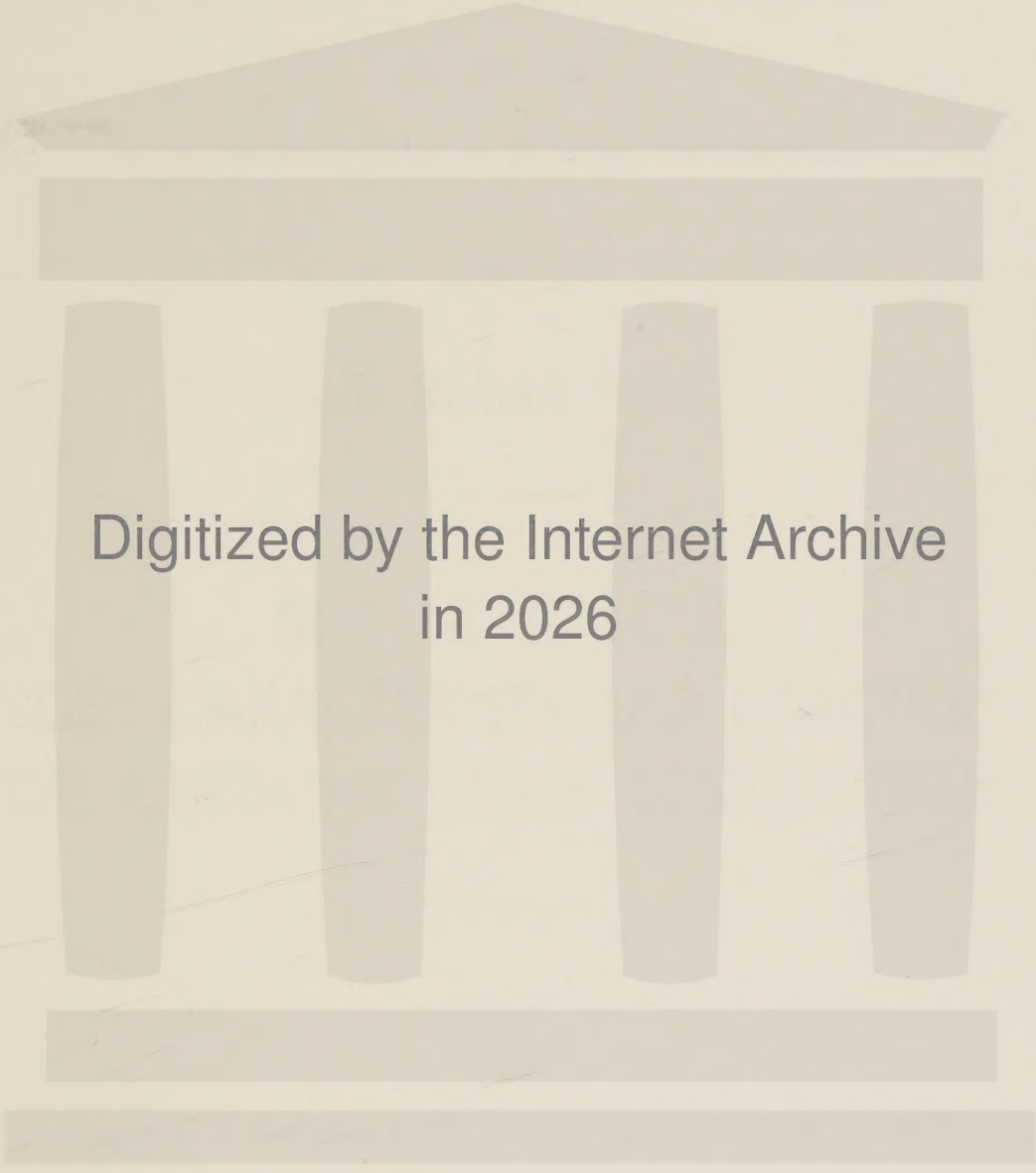
Jean-Robert HAIT

SUR LE CALCUL DES CARACTÉRISTIQUES EXACTES DE CERTAINS TESTS SÉQUENTIELS

Soutenue le 2 Octobre 1970, devant la Commission d'examen :

MM. les Professeurs HURON — Président

MERIC
GUERIN
CAUSSINUS
ETTINGER
— Examinateurs


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543906_0025

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE

pour l'obtention

du grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

Jean-Robert HAIT

SUR LE CALCUL DES CARACTÉRISTIQUES EXACTES DE CERTAINS TESTS SÉQUENTIELS

Soutenue le 2 Octobre 1970, devant la Commission d'examen :

MM. les Professeurs HURON — Président

MERIC
GUERIN
CAUSSINUS
ETTINGER — Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE PAUL SABATIER

TOULOUSE

DIRECTION DE L'UNIVERSITE

M. LARENG, Président

M. MATHIS, 1er Vice-Président

M. MARTIN, 2ème Vice-Président

M. MOUNIQ, 3ème Vice-Président

H O N O R A R I A T

M. BLAIZOT ..... Doyen honoraire

M. CAPDECOMME ..... Doyen honoraire, Recteur honoraire, Professeur honoraire.

M. DELTHEIL..... Recteur honoraire, Doyen honoraire, Professeur honoraire

M. DUPOUY..... Membre de l'Institut, Doyen honoraire, Directeur Général honoraire du C.N.R.S.

M. DURAND ..... Doyen honoraire

M. FOUCHE ..... Professeur honoraire

M. GAUSSENS..... Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut

M. JACQUES ..... Professeur honoraire

M. MIGNONAC..... Professeur honoraire

M. MORQUER ..... Professeur honoraire, correspondant de l'Institut

M. SECONDAT..... Professeur honoraire

M. VANDEL ..... Professeur honoraire , Membre de l'Institut

M. TEISSIE-SOLIER.. Professeur honoraire

P R O F E S S E U R S

M. ESCANDE..... Mécanique des Fluides, Membre de l'Institut

M. CASTERAS..... Géologie, Correspondant de l'Institut

M. BEDOS..... Chimie

M. CAPDECOMME..... Minéralogie

M. DUPIN..... Radioélectricité

M. NOUVEL..... Biologie Générale

M. GALLAIS..... Chimie, Correspondant de l'Institut

M. DURAND ..... Physique

M. FERT ..... Physique

M. DIEHL ..... Agronomie

M. LESBRE..... Chimie Organique

M. BRUNEL ..... Physiologie Végétale

M. HURON ..... Mathématiques Appliquées

M. MARGULIS ..... Pédologie

M. TRICHE ..... Chimie Analytique et Spectrographie

M. LEDOUX ..... Zoologie appliquée

M. RIVALS ..... Agriculture

M. PERRIER..... Physique

M. MATHIS ..... Chimie

M. ORLIAC ..... Géochimie et Minéralogie

M. LAFOURCADE..... Physique

M. ANGELIER..... Zoologie

Melle DE FERRE ..... Botanique

M. FARRAN ..... Minéralogie et Géothechnique

M. LAUDET ..... Physique théorique et Calcul Numérique

M.S SERFATY..... Biologie animale

M. NOUGARO ..... Hydraulique générale et appliquée

M. LAGASSE ..... Electrotechnique

M. GARDY..... Génie Chimique

M. BLANC ..... Physique Nucléaire

M. BIREBENT..... Electronique appliquée

M. VOIGT ..... Chimie minérale

M. LEREDDE..... Botanique

M. LELUBRE ..... Géologie

M. TROCHAIN ..... Botanique

M. MASDUPUY..... Chimie

M. LALAGUE ..... Mathématiques générales

M. DESSENS ..... Physique du globe, correspondant de l'Institut

M. BOUIGUE ..... Astronomie

M. COUCHET ..... Physique

M. LEJEUNE ..... Chimie

M. LASCOMBES..... Botanique

M. ASSELINEAU ..... Chimie biologique

M. MAURET ..... Chimie systématique

M. AGID ..... Physiologie

M. MONTANT..... Cryptogamie

M. GAUTIER..... Physique

M. CRUMEYROLLE..... Mathématiques

M. GOURINARD ..... Géologie

M. PULOU ..... Minéralogie

M. CAMBOU ..... Physique Spatiale

M. MIQUEL ..... Chimie

M. LACOSTE ..... Electrotechnique

M. THIBAULT ..... Mécanique Rationnelle et Appliquée

M. MONTEL ..... Chimie Physique et Electrochimie

M. MASCART ..... Mathématiques

M. MEDIONI ..... Psychophysiologie

M. THIRRIOT ..... Hydrodynamique E.N.S.E.I.H.T.

M. BRENON ..... Géologie

M. LAFON ..... Calcul différentiel et intégral

M. RAYNAUD P..... Physiologie animale

M. ZALTA ..... Chimie biologique

M. SEVELY ..... Electrotechnique

M. POMMIEZ..... Mathématiques

M. REY..... Biologie végétale

M. COULOMB .... Physique

M. TRINQUIER .. Physique

M. MARONI ..... Chimie

M. BEETSCHEN ... Biologie Générale

M. GRUAT ..... Mécanique des Fluides (Hydraulique)

M. DERACHE ... Physiologie Animale

PROFESSEURS ASSOCIES

M. MANSOUR

M. SAKUMA

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. HAMANT..... Botanique

Mme BRUNEL..... Physiologie végétale

Melle BERDUCOU..... Physiologie végétale

M. PICCA ..... Physique

M. MERIC ..... Mathématiques appliquées

Mme LECAL..... Zoologie

M. BUGAREL..... Génie Chimique

M. MIROUSE..... Géologie

M. PILOD ..... Physique

M. LARROQUE ..... Physique

M. BARRANS ..... Chimie

Mme LAFON ..... Mathématiques

Melle LAPEYRE..... Mathématiques (Informatique)

M. DAT ..... Mécanique des fluides

M. JEANNIN ..... Chimie Minérale

M. BERTRAND ..... Chimie

M. SATGE..... Chimie Organique
M. DESQ..... Mathématiques
M. MAHENC ..... Chimie
M. LATTES..... Chimie
M. ROCARD..... Electronique
M. DEGEILH..... Physique
M. FALLOT..... Biologie végétale, (Viticulture et arboriculture)
M. POILBLANC..... Chimie
M. TOUZE..... Physiologie végétale
M. FRASNAY..... Mathématiques
M. CASSAGNAU..... Zoologie
M. GUERIN..... Mathématiques

M A I T R E S DE C O N F E R E N C E S

M. BLANCHARD .... Mathématiques
M. HOFFMANN ..... Electronique
M. BITSCH ..... Zoologie
M. FONTAN ..... Physique Nucléaire
M. PESCIA ..... Physique
M. SICARD ..... Biologie Génétique
M. CAUSSINUS..... Mathématiques Appliquées
M. DE LOTH ..... Chimie Physique
M. MARTY ..... Physique industrielle
M. BAUDRAS..... Chimie Biologique
M. DURAND Ph..... Physique
M. LEFEUVRE ..... Eletronique E.N.S.E.I.H.T.
M. SOUQUET ..... Géologie
M. SAPORTE..... Physique
M. ATTEIA ..... Mathématiques
M. ENJALBERT..... Chimie
M. IMBERT ..... Psychophysiologie
M. SCHNEIDER .... Biologie cellulaire
M. ANGELINO ..... Génie chimique

M. DABOSI ..... E.N.S.C.

M. ETTINGER..... Mathématiques

M. CALVET..... Mécanique des Fluides (E.N.S.E.I.H.T.)

M. PAGANI..... Physique

M. CUPPENS..... Mathématiques

M. MATHIEU..... Chimie Analytique

M. TRANNOY..... Physique (E.N.S.E.I.H.T.)

M. CASTAGNETTO..... Mathématiques (E.N.S.E.I.H.T.)

M. GILOT..... Génie Chimique (Institut de Génie Chimique)

M A I T R E S D E C O N F E R E N C E S A S S O C I E S

M. PUN

M. PARKS

C H A R G E S D' E N S E I G N E M E N T

M. BEAUFILS..... Informatique

M. DARROZES..... Mécanique

M. OLIVIER..... Mathématiques

Melle BARBANCE..... Mathématiques

Personnel de la Faculté affecté à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

P R O F E S S E U R S

M. ROQUES ..... Chimie Industrielle

M. GRATELOUP..... Génie Electrique

P R O F E S S E U R S S A N S C H A I R E

M. CASSIGNOL ..... Génie Electrique
M. COLLETTE ..... Physique

M A I T R E S D E C O N F E R E N C E S

M. FAGET..... Physique
M. TRUCHASSON ..... Mécanique
M. SCHUTTLER ..... Physique
M. MIRA ..... Génie Electrique
M. LETURCQ..... Génie Electrique
M. SIRIEYS ..... Génie Civil
M. DURAND G..... Chimie
M. CARRARA..... Physique

C H A R G E S D'E N S E I G N E M E N T

M. VERDIER ..... Chimie

Personnel Affecté à l'Institut Universitaire de Technologie de Toulouse

M A I T R E S D E C O N F E R E N C E S

M. MARTIN ..... Génie Electrique
M. THENOZ ..... Minéralogie
M. PERENNOU ..... Informatique

C H A R G E S D' E N S E I G N E M E N T

M. REY..... Génie Electrique

A D M I N I S T R A T I O N

M. PRINEAU..... Conseiller Administratif des Services Universitaires.

Monsieur le Doyen Gaston DUPOUY, Membre de l'Institut, Directeur Général Honoraire du C.N.R.S, a fait preuve à notre égard d'une grande bienveillance ; qu'il soit assuré de notre profonde et respectueuse reconnaissance.

Monsieur le Professeur Léopold ESCANDE , Membre de l'Institut , Directeur de l'E.N.S.E.I.H.T , a bien voulu présenter à l'Académie des Sciences plusieurs notes contenant certains résultats de ce mémoire ; qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre vive gratitude .

Monsieur le Professeur Roger HURON nous a initiés à la Statistique Mathématique et n'a cessé de nous prodiguer les marques de sa sollicitude . Nous le remercions vivement de nous avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury .

Monsieur le Professeur Jean MERIC nous a accueilli dans son Laboratoire de Phénomènes Aléatoires et est à l'origine de ce sujet de recherche. Tout au long de ce travail, il nous a permis de bénéficier de son expérience en ce domaine. Qu'il soit assuré de notre fidèle attachement.

Monsieur le Professeur Roger GUERIN a bien voulu, en faisant partie du Jury, témoigner son amitié à notre égard.

Monsieur le Professeur Henri CAUSSINUS nous a permis, par ses critiques judicieuses, d'éviter bien des erreurs.

Monsieur le Professeur Pierre ETTINGER nous a aidés de ses précieux conseils, en particulier au Chapitre IV de ce travail.

Nous les remercions tous très chaleureusement.

Nos remerciements vont aussi à mes amis chercheurs et techniciens du Laboratoire de Statistique de l'Université Paul SABATIER de TOULOUSE et du Département de Mathématiques de l'I.N.S.A. dont l'amitié nous a été une aide constante.

Nous nous devons de citer en particulier Mademoiselle Christiane LINARES et Monsieur Christian TERTRE qui ont assuré avec compétence et dévouement la mise en pages de ce travail .

I N T R O D U C T I O N

L'objet de ce travail est de donner des méthodes de calcul des caractéristiques exactes du test séquentiel du rapport des probabilités utilisé dans certaines situations.

Un test séquentiel est un test tel que le nombre d'observations (ou le temps d'observation) nécessaires pour prendre une décision est aléatoire.

La première ébauche d'un test séquentiel a été tracée par DODGE et ROMIG * en 1929, mais l'étude de cette partie importante de la statistique n'a commencé réellement à se développer que durant la seconde guerre mondiale, aux Etats-Unis avec FRIEDMAN, WALLIS, WALD et le STATISTICAL RESEARCH GROUP OF COLUMBIA UNIVERSITY et en Grande-Bretagne avec BARNARD. L'élaboration et la mise au point de la théorie du test séquentiel du rapport des probabilités sont en majeure partie dues à WALD.

La définition de ce test et les principaux résultats sur ses propriétés et caractéristiques sont exposés dans le chapitre I de ce travail.

Par la suite, le déroulement d'un test séquentiel sera considéré comme une marche aléatoire dans un espace à plusieurs dimensions. Nous définirons une propriété de quasi-périodicité vérifiée par toutes les marches aléatoires considérées.

* *Les références des articles des auteurs cités dans l'introduction et pour lesquels nous ne renvoyons pas à la bibliographie peuvent être trouvées dans* [43].

Le CHAPITRE II est consacré à l'étude de méthodes de calcul des caractéristiques exactes du test sur le paramètre de la loi de certaines variables aléatoires discrètes. Après l'exposé de deux méthodes liées à des marches aléatoires différentes, une méthode, différente de celle de MERIC [32] , plus spécialement adaptée au test séquentiel binomial est envisagée ; cette méthode permet en particulier de donner les caractéristiques exactes de deux tests proposés par ARMITAGE [2] [3] et composés de plusieurs tests binomiaux simultanés.

Au CHAPITRE III, nous nous intéressons au test d'hypothèses sur les probabilités de transitions de chaînes de Markov d'ordre un. Les caractéristiques exactes du test sont données pour des chaînes homogènes finies, non homogènes finies et homogènes dénombrables en considérant plusieurs types possibles d'échantillonnages.

Le CHAPITRE IV commence par l'étude du test séquentiel appliqué à certains processus aléatoires continus dans le temps. Après l'exposé des résultats de DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ [10] , nos méthodes sont utilisées pour étudier les caractéristiques exactes du test séquentiel sur le paramètre de Processus de Poisson à une ou plusieurs dimensions, de Processus de naissance linéaires, de Processus de mort linéaires, de Processus de naissance et mort linéaires. Puis, comme application du test sur le paramètre d'un Processus de Poisson ou d'un Processus de mort linéaire, sont données les caractéristiques exactes du test séquentiel sur le paramètre de la loi d'une variable aléatoire exponentielle, en particulier dans des situations classiques de tests de fiabilité .

C H A P I T R E -I-

LE TEST SEQUENTIEL DU RAPPORT DES PROBABILITES

A. DEFINITION DU TEST

Dans ce chapitre, les notations utilisées sont très proches de celles de WALD [43] .

Soit une variable aléatoire X. Si X est discrète, nous noterons $f(x_i,\theta)$ la probabilité que $X = x_i$. Si X est continue, nous noterons $f(x_i,\theta)$ sa densité de probabilité au point x_i . Dans ce qui suit, seul le cas discret sera étudié, les résultats étant identiques dans le cas continu.

Le paramètre θ a un nombre fini de dimensions

Soient les hypothèses simples $H_i : \theta = \theta_i$ $\quad (i = 0,1)$

La probabilité d'obtenir l'échantillon x de taille n donnée $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ sera notée :

$$p_{1n}(x) = f(x_1, \theta_1)\, f(x_2, \theta_1) \ldots\ldots\ldots f(x_n, \theta_1) \quad \text{sous l'hypothèse } H_1$$

$$p_{0n}(x) = f(x_1, \theta_0)\, f(x_2, \theta_0) \ldots\ldots\ldots f(x_n, \theta_0) \quad \text{sous l'hypothèse } H_0$$

Le test séquentiel du rapport des probabilités pour éprouver les hypothèses simples H_0 et H_1 est défini de la façon suivante :

Soient deux constantes positives A et B telles que $B < A$

A chaque étape de l'expérimentation ($n = 1,2,\ldots\ldots$) le rapport des

probabilités $\frac{p_{1n}(x)}{p_{0n}(x)}$ est calculé .

Tant que nous avons $B < \frac{p_{1n}(x)}{p_{0n}(x)} < A$, nous continuons les observations.

Dès que $\frac{p_{1n}(x)}{p_{0n}(x)} \leq B$ l'hypothèse H_0 est acceptée.

Dès que $\frac{p_{1n}(x)}{p_{0n}(x)} \geq A$ l'hypothèse H_1 est acceptée.

Les constantes A et B sont choisies de telle sorte que les probabilités α et β d'erreur de première et seconde espèce aient une valeur donnée.

La règle de décision précédente peut s'écrire différemment si l'on prend le logarithme de $\frac{p_{1n}(x)}{p_{0n}(x)}$

$$\text{Log } \frac{p_{1n}(x)}{p_{0n}(x)} = \sum_{i=1}^{n} \text{Log } \frac{f(x_i,\theta_1)}{f(x_i,\theta_0)}$$

En posant $z_i = \text{Log } \frac{f(x_i,\theta_1)}{f(x_i,\theta_0)}$

et $Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$

$$\text{Log } \frac{p_{1n}(x)}{p_{0n}(x)} = Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

La règle de décision devient :

Tant que $\text{Log } B < Z_n < \text{Log } A$ nous continuons les observations.

Dès que $Z_n \leq \text{Log } B$ l'hypothèse H_0 est acceptée.

Dès que $Z_n \geq \text{Log } A$ l'hypothèse H_1 est acceptée.

B. PROPRIETES ET CARACTERISTIQUES DU TEST

-I- CARACTERE FINI DU TEST

Théorème I-1 . Le test séquentiel du rapport des probabilités permet, dans le cas d'épreuves indépendantes , de prendre une décision avec une probabilité 1 .

Démonstration :

$$\text{Posons } C = |\text{Log } A| + |\text{Log } B|$$

Soit la suite z_1 , z_2 ,.....

Posons $\xi_k = \sum_{i=1}^{r} z_{(k-1)r+i}$ ce qui revient à remplacer la suite précédente par une nouvelle suite composée de termes somme de r termes z_i .

Le fait que le test ne se termine jamais entraîne

$$|\xi_k| < C \qquad k \in \mathbb{N}$$

soit $\xi_k^2 < C^2$

Il est donc suffisant pour démontrer le théorème I,1 de prouver que :

$$\Pr\left[\xi_1^2 < C^2 \text{ et } \xi_2^2 < C^2 \text{ et } .....\right] = 0$$

Posons $p_k = \Pr\left[\xi_k^2 < C^2\right]$

Nous remarquons que $p_k = p$ ne dépend pas de k, car les variables aléatoires ξ_k sont identiquement distribuées.

D'où $\Pr\left[\xi_1^2 < C^2 \text{ et } \xi_2^2 < C^2 \text{ et..... et } \xi_j^2 < C^2\right] = p^j$

Il suffit donc de démontrer que p est strictement inférieur à 1 .

Or $E(\xi_k^2) > C^2 \Longrightarrow p < 1$

$$\text{Var}\,(\xi_k^2) = E(\xi_k^2) - E^2(\xi_k) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{r} z_{(k-1)r+i}\right)$$

d'où $E(\xi_k^2) \geq \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{r} z_{(k-1)r+i}\right)$

Les variables aléatoires z_i sont indépendantes et identiquement distribuées donc :

$$E(\xi_k^2) \geq r \ \text{Var}\, z_i$$

$\text{Var}\, z_i > 0 \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}^*$

d'où le choix de r suffisamment grand entraîne l'inégalité

$$E(\xi_k^2) > C^2$$

d'où $p < 1$ et le théorème I,1 est démontré .

-II- . IDENTITE FONDAMENTALE DE WALD

Soit N la variable aléatoire représentant le nombre nécessaire d'observations pour prendre une décision. Soit D' le domaine du plan complexe tel que $t \in D' \Longrightarrow E(e^{zt}) = \Phi(t)$ existe et est finie.

Soit l'identité suivante :

$$E\left[e^{Z_N t + (Z_n - Z_N)t}\right] = E\left[e^{Z_n t}\right] = \left[\Phi(t)\right]^n$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$

Soit $P_n = \Pr\left[N \leq n\right]$

Pour toute variable aléatoire U, nous noterons $E_n(U)$ l'espérance mathématique de U sachant que $N \leq n$ et $E_n^*(U)$ l'espérance mathématique de U sachant que $N > n$.

Nous pouvons écrire l'identité précédente :

$$P_n\, E_n\left[e^{Z_N t + (Z_n - Z_N)t}\right] + (1 - P_n)\, E_n^*\left[e^{Z_n t}\right] = \left[\Phi(t)\right]^n$$

Pour $N \leq n$, la variable aléatoire $Z_n - Z_N$ est indépendante de la variable aléatoire Z_N .

Nous avons donc :

$$E_n \left[e^{Z_N t + (Z_n - Z_N)t} \right] = E_n \left[e^{Z_N t} \left[\Phi(t)\right]^{n-N} \right]$$

D'où

$$P_n \; E_n \left[e^{Z_N t} \left[\Phi(t)\right]^{n-N} \right] + (1-P_n) \; E_n{}^* \left[e^{Z_n t} \right] = \left[\Phi(t)\right]^n$$

Soit en divisant par $\left[\Phi(t)\right]^n$:

$$P_n \; E_n \left[e^{Z_N t} \left[\Phi(t)\right]^{-N} \right] + (1-P_n) \; \frac{E_n{}^* \left[e^{Z_n t} \right]}{\left[\Phi(t)\right]^n} = 1$$

Soit D" le domaine du plan complexe tel que $t \in D'' \Longrightarrow |\Phi(t)| \geq 1$.

Soit D l'intersection de D' et D" .

$\left| E_n \left[e^{Z_n t} \right] \right|$ est une fonction bornée de n. En effet, pour $N > n$, la double inégalité $\text{Log } B < Z_n < \text{Log } A$ est vérifiée.

D'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-P_n) = 0$

Nous avons donc pour $t \in D$

$$\lim_{n \to +\infty} (1-P_n) \; \frac{E_n{}^* \left[e^{Z_n t} \right]}{\left[\Phi(t)\right]^n} = 0$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n \; E_n \left[e^{Z_N t} \left[\Phi(t)\right]^{-N} \right] = E \left[e^{Z_N t} \left[\Phi(t)\right]^{-N} \right]$

l'identité fondamentale de WALD s'écrit :

$$E \left[e^{Z_N t} \left[\Phi(t)\right]^{-N} \right] = 1 \qquad \forall \; t \in D$$

-III- RELATIONS ENTRE LES CONSTANTES A, B, α et β .

Considérons l'espace des échantillons. Soit $D_i(n)$ l'ensemble des échantillons de taille n conduisant à l'acceptation de l'hypothèse $H_i (i=0,1)$.

Pour $\dfrac{p_{1n}(x)}{p_{0n}(x)} \geq B$ l'hypothèse H_0 est acceptée

Or
$$\begin{cases} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_0(n)}} p_{1n}(x) = \beta \\ \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_0(n)}} p_{0n}(x) = 1 - \alpha \\ p_{1n}(x) \leq B\, p_{0n}(x) \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_0(n) \end{cases} \end{cases}$$

d'où $$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_0(n)}} p_{1n}(x) \leq B \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_0(n)}} p_{0n}(x)$$

soit $\beta \leq B(1-\alpha)$

Pour $\dfrac{p_{1n}(x)}{p_{0n}(x)} \geq A$ l'hypothèse H_1 est acceptée

Or
$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_1(n)}} p_{1n}(x) = 1 - \beta$$

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_1(n)}} p_{0n}(x) = \alpha$$

$$p_{1n}(x) \geq A\, p_{0n}(x) \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_1(n) \end{cases}$$

d'où $\sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_1(n)}} p_{1n}(x) \geq A \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ x \in D_1(n)}} p_{0n}(x)$

soit $1 - \beta \geq A\,\alpha$

D'où les relations

$$\begin{cases} A \leq \dfrac{1-\beta}{\alpha} \\ B \geq \dfrac{\beta}{1-\alpha} \end{cases}$$

-IV- FONCTION D'EFFICACITE (OPERATING CHARACTERISTIC FUNCTION)

La fonction d'efficacité $L(\theta)$ est la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 pour la valeur θ du paramètre.

WALD [43] démontre le lemme suivant :

Lemme : Soit Z une variable aléatoire remplissant les trois conditions suivantes:

1°/ E(Z) existe et n'est pas nulle.

2°/ Il existe un réel positif δ tel que :

$$\Pr\left[e^Z < 1 - \delta\right] > 0$$

et

$$\Pr\left[e^Z > 1 + \delta\right] > 0$$

3°/ $\forall\, h \in \mathbb{R}$, $E(e^{hZ}) = g(h)$ existe.

Alors, il existe une valeur et une seule h_0 non nulle telle que

$$g(h_0) = 1$$

A partir de ce lemme, WALD trouve une approximation de la fonction d'efficacité en négligeant les effets du dépassement possible des frontières A et B.

Il détermine la fonction $h(\theta)$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_0)}\right]^{h(\theta)} f(x,\theta)\,dx = 1$$

si X est variable aléatoire continue

$$\sum_{x} \left[\frac{f(x,\theta_1)}{f(x,\theta_1)}\right]^{h(\theta)} f(x,\theta) = 1$$

si X est une variable aléatoire discrète

La fonction d'efficacité déduite est

$$L(\theta) = \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}$$

-V- NOMBRE MOYEN D'OBSERVATIONS (AVERAGE SAMPLE NUMBER)

Soit N la variable aléatoire représentant le nombre d'observations nécessaires pour prendre une décision. Nous notons $E(N,\theta)$ le nombre moyen d'observations pour la valeur θ du paramètre.

$$Z_N = z_1 + z_2 + \ldots + z_N$$

Soit n un entier positif fixé.

Nous posons $Z'_N = Z_n - Z_N$

$$E(Z_n,\theta) = n\,E(z,\theta) = E(Z_N + Z'_N,\theta)$$

Soit $P_n = Pr\,[N \leq n]$

$$E(Z_N + Z'_N,\theta) = P_n\,E_n(Z_N + Z'_N,\theta) + (1 - P_n)\,E_n^*(Z_n,\theta)$$

Comme $\text{Log } B \leq Z_n \leq \text{Log } A$ pour $N > n$ et comme $\lim_{n \to +\infty} (1 - P_n) = 0$,

nous obtenons :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[n\, E(z,\theta) - P_n\, E_n\, (Z_N + Z'_N, \theta) \right] = 0$$

or $\quad E_n(Z'_N, \theta) = E_n(n - N, \theta)\, E(z,\theta)$

$$E_n(Z'_N, \theta) = - E_n(N,\theta)\; E(z,\theta) + n\, E(z,\theta)$$

d'où $\lim_{n \to +\infty} \left[n(1 - P_n)\, E(z,\theta) + P_n\, E_n\, (N,\theta)\, E(z,\theta) - P_n\, E_n\, (Z_N,\theta) \right] = 0$

comme d'après [14] , $\lim_{n \to +\infty} n(1 - P_n) = 0$

nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \left[P_n\, E_n\, (N,\theta)\, E(z,\theta) - P_n\, E_n (Z_N,\theta) \right] = 0$$

or $\quad \lim_{n \to +\infty} P_n\, E_n\, (N,\theta) = E(N,\theta)$

et $\quad \lim_{n \to +\infty} P_n\, E_n\, (Z_N,\theta) = E(Z_N,\theta)$

Nous pouvons donc écrire :

$$E(Z_N,\theta) = E(N,\theta)\, E(z,\theta)$$

soit $\quad E(N,\theta) = \dfrac{E(Z_N,\theta)}{E(z,\theta)}$

$$E(Z_N,\theta) = L(\theta)\, \text{Log } B + \left[1 - L(\theta)\right] \text{Log } A$$

d'où une approximation du nombre moyen d'observations.

$$E(N,\theta) = \frac{L(\theta)\, \text{Log } B + \left[1 - L(\theta)\right] \text{Log } A}{E(z,\theta)}$$

-VI- OPTIMALITE DU TEST

WALD et WOLFOWITZ [44] ont donné une démonstration de la propriété suivante :

Parmi tous les tests séquentiels de l'hypothèse simple $f(x,\theta) = f(x,\theta_0)$ contre l'hypothèse simple $f(x,\theta) = f(x,\theta_1)$ avec des probabilités d'erreurs de première et seconde espèce α et β données, c'est le test séquentiel du rapport des probabilités qui donne les valeurs les plus faibles de $E(N,\theta_0)$ et $E(N,\theta_1)$.

D'autre part WALD a montré que pour $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_1$ l'économie réalisée en moyenne par rapport au nombre d'observations nécessaires à un test non néquentiel pour les mêmes valeurs α et β des probabilités d'erreurs de première et seconde espèce, est proche de 50% .

Cependant si l'on s'éloigne des valeurs θ_0 et θ_1, cette propriété n'est plus vraie. En particulier pour un paramètre θ à une dimension, quand $\theta_0 < \theta < \theta_1$, $E(N,\theta)$ peut devenir dans certains cas supérieure à la taille d'échantillon requise par un test non séquentiel de mêmes probabilités d'erreurs de première et seconde espèce. Ceci a conduit à utiliser des méthodes de troncature du test séquentiel du rapport des probabilités.(AROIAN [4]) .

-VII- LE TEST DE CERTAINES HYPOTHESES COMPOSEES

Quand le paramètre θ est à une dimension, le test séquentiel du rapport des probabilités peut être utilisé pour éprouver les hypothèses H_0: $\theta \leq \theta^*$ et H_1 : $\theta > \theta^*$

Nous choisissons pour cela deux valeurs θ_0 et θ_1 vérifiant $\theta_0 < \theta^* < \theta_1$ (sur des critères non statistiques, économiques par exemple) tellss que ;

pour $\theta \leq \theta_0$ (zone de préférence pour l'acceptation de H_0) la probabilité d'erreur soit au plus égale à α donné,

pour $\theta \geq \theta_1$ (zone de préférence pour le rejet de H_0) la probabilité d'erreur soit au plus égale à β donné.

La région $\theta_0 < \theta < \theta_1$ est appelée zone d'indifférence.

Si θ est dans la zone d'indifférence, une décision erronée peut être considérée comme sans importance (économique par exemple), alors que le risque d'erreur doit être réduit le plus possible si θ est dans l'une des deux autres zones.

Comme la fonction d'efficacité du test séquentiel des hypothèses $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_1$ est décroissante, nous sommes amenés à choisir ce test tel que :

$$L(\theta_0) = 1 - \alpha$$

$$L(\theta_1) = \beta$$

C H A P I T R E -II-

LE TEST SEQUENTIEL D'HYPOTHESES SUR LE PARAMETRE DE LA LOI D'UNE VARIABLE ALEATOIRE - CARACTERISTIQUES EXACTES

A. METHODE DE WALD

-I- PRELIMINAIRES

Dans tout ce qui, dans ce chapitre, concerne les variables aléatoires discrètes, nous nous plaçons dans une des conditions données par WALD dans l'appendice A4 de [43] :

$z_i = \text{Log} \dfrac{f(x_i,\theta_1)}{f(x_i,\theta_0)}$, $(i \in \mathbb{N}^*)$ est le produit d'un entier par un réel positif g (condition C) .

La condition C est peu restrictive. En effet, la condition z_i rationnel est contenue dans la condition C et nous pouvons approcher d'aussi prés que nous le souhaitons un réel par un rationnel, ce qui permet d'obtenir d'excellentes approximations.

D'autre part les données utilisées dans les applications numériques pratiques, en particulier si nous utilisons un ordinateur, sont toujours rationnelles.

WALD [43] donne une méthode permettant d'obtenir des valeurs exactes de la fonction d'efficacité et du nombre moyen d'observations liés au test si les les conditions suivantes sont remplies:

$z_i = \text{Log} \dfrac{f(x_i,\theta_1)}{f(x_i,\theta_0)}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

D'autre part, ces valeurs de z_i sont le produit d'entiers par une constante réelle positive g (condition C) .

-II- CARACTERISTIQUES DU TEST

Pour obtenir la fonction d'efficacité et le nombre moyen d'observations, WALD calcule la loi exacte de la variable $Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$ à l'arrêt de la procédure de test.

Soient g_1 et g_2 deux entiers positifs tels que

$$\Pr\ [z = -g_1 g, \theta] > 0$$

et

$$\Pr\ [z = +g_2 g, \theta] > 0$$

et que les valeurs de z puissent être seulement des multiples entiers de g compris entre $-g_1 g$ et $g_2 g$.

Nous noterons $\Pr\ [z = ig, \theta] = h_i$

Posons $E(e^{zt}) = \sum_{i=-g_1}^{g_2} h_i\ e^{tig} = \Phi(t)$

Pour avoir les solutions de l'équation $\Phi(t) = 1$, posons $u = e^{tg}$ et résolvons l'équation :

$$\sum_{i=-g_1}^{g_2} h_i\ u^i = 1$$

Posons $k = g_1 + g_2$ et appelons $u_1, u_2, \ldots u_k$ les k racines de l'équation précédente.

Nous supposerons que cette équation n'admet pas de racine multiple. L'identité fondamentale de WALD est :

$$E\ \left[e^{Z_N t}\ [\Phi(t)]^{-N}\right] = 1$$

Remplaçons e^{tg} par u_i . L'identité fondamentale s'écrit alors :

$$E\left[u_i^{\frac{Z_N}{g}}\right] = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Soit $[a]$ le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{\text{Log } A}{b}$ et

$[b]$ le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{\text{Log } B}{g}$

$\frac{Z_N}{g}$ ne peut prendre que les valeurs :

$([b] - g_1 + 1), ([b] - g_1 + 2), \ldots, [b], [a], [a] + 1, \ldots, ([a] + g_2 - 1)$.

Appelons respectivement $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ces k différentes valeurs et posons :

$$\zeta_i = P_r\left[Z_N = c_i g, \theta\right]$$

L'identité fondamentale s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^{k} \zeta_j \, u_i^{c_j} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Soient Δ le déterminant de la matrice d'éléments $u_i^{c_j}$ $(i,j = 1,2,\ldots, k)$ et Δ_j le déterminant obtenu à partir de Δ en remplaçant par 1 les éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Si $\Delta \neq 0$, nous obtenons ζ_j par :

$$\zeta_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

La valeur exacte de la fonction d'efficacité $L(\theta) = Pr\ [Z_N \leq \text{Log } B]$ est donnée par

$$L(\theta) = \sum_{j=([b]-g_1+1)}^{[b]} \frac{\Delta_j}{\Delta}$$

Nous pouvons calculer aussi le nombre moyen d'observations $E(N,\theta)$ à partir de la loi exacte de Z_N .

$$E(N,\theta) = \frac{E(Z_N,\theta)}{E(z,\theta)}$$

or $E(Z_N,\theta) = \sum_{j=1}^{k} c_j g \frac{\Delta_j}{\Delta}$

d'où $E(N,\theta) = \frac{1}{E(z,\theta)} \sum_{j=1}^{k} c_j g \frac{\Delta_j}{\Delta}$

Pour obtenir les valeurs de $\zeta_1, \ldots\ldots, \zeta_k$ il faut calculer les racines $u_1, \ldots., u_k$ de l'équation

$$\sum_{i=-g_1}^{g_2} h_i u^i = 1$$

On peut tourner la difficulté en utilisant une méthode donnée par GIRSHICK [14]. En multipliant $(\sum_{i=-g_1}^{2} h_i u^i - 1)$ par u^{g_1} et $(\sum_{j=1}^{k} \zeta_j u^{c_j} - 1)$ par $u^{g_1-[b]-1}$, nous obtenons deux polynomes f(u) et F(u). Le degré de f(u) est $g_1 + g_2 = k$ et celui de F(u) est $k + [a] - [b] - 2$. Toute racine de $f(u) = 0$ est aussi racine de $F(u) = 0$.

Nous pouvons donc écrire $F(u) = f(u)\ f^*(u)$

où $f^*(u)$ est un polynome de degré $[a] - [b] - 2$ soit

$$f^*(u) = k_0 + k_1 u + \ldots + k_{[a]-[b]-2} u^{[a]-[b]-2}$$

En égalant pour chaque puissance de u, les coefficients de F(u) et de f(u) $f^*(u)$, nous obtenons un système de $k + [a] - [b] - 1$ équations linéaires à $k + [a] - [b] - 1$ inconnues $\zeta_1, \ldots, \zeta_k, k_0, k_1, \ldots, k_{[a]-[b]-2}$.

D'où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ peuvent être calculées sans résoudre l'équation

$$\sum_{i=-g_1}^{g_2} h_i u^i = 1 .$$

B. PREMIERE METHODE LIEE A LA MARCHE ALEATOIRE MA 1

-I- PRELIMINAIRES

La méthode utilisée ici, consiste à considérer le déroulement du test séquentiel comme la marche aléatoire avec règle d'arrêt, d'un point dans un espace euclidien à m dimensions . Nous avons vu que pour le test séquentiel du rapport des probabilités nous pouvions définir la règle de décision de la façon suivante :

$$\text{Si } Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} \text{Tant que } \text{Log } B < Z_n < \text{Log } A \text{ une observation supplémentaire est nécessaire} \\ \text{Dès que } Z_n \leq \text{Log } B \text{ l'hypothèse } H_0 \text{ est acceptée} \\ \text{Dès que } Z_n \geq \text{Log } A \text{ l'hypothèse } H_1 \text{ est acceptée} \end{cases}$$

Dans le cas où z_i ne peut prendre qu'un nombre fini m de valeurs, Z_n peut s'écrire :

$$Z_n = \sum_{j=1}^{m} n_j z_j$$

$n_j \in \mathbb{N}$ représentant le nombre de fois où z prend la valeur z_j dans les n tirages.

Nous avons donc la relation $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$.

La règle de décision s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Tant que } \text{Log } B < \sum_{j=1}^{m} n_j z_j < \text{Log } A \text{ une observation supplémentaire est nécessaire} \\ \text{Dès que } \sum_{j=1}^{m} n_j z_j \leq \text{Log } B \text{ l'hypothèse } H_0 \text{ est acceptée} \\ \text{Dès que } \sum_{j=1}^{n} n_j z_j \geq \text{Log } A \text{ l'hypothèse } H_1 \text{ est acceptée} \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = n \end{cases}$$

Dans le cas où l'on peut écrire z_j sous la forme $a_j g$ ($j = 1,2,\ldots, m$) avec $g \in \mathbb{R}$ et $a_j \in \mathbb{Z}$, (condition C) , le système précédent peut se transformer en :

$$\begin{cases} \text{Tant que } d_0 < \sum_{j=1}^{m} a_j n_j < d_1 \text{ une observation supplémentaire est nécessaire} \\ \text{Dès que } \sum_{j=1}^{m} a_j n_j \leq d_0 \text{ l'hypothèse } H_0 \text{ est acceptée} \\ \text{Dès que } \sum_{j=1}^{m} a_j n_j \geq d_1 \text{ l'hypothèse } H_1 \text{ est acceptée} \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = n \end{cases}$$

avec $a_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m$

et $d_0 \in \mathbb{R}$, $d_1 \in \mathbb{R}$ tels que $d_0 < 0 < d_1$

Nous allons considérer la marche aléatoire "MA 1" d'un point M(n) de coordonnées $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, $(\sum_{j=1}^{m} n_j = n)$ dans un espace euclidien à m dimensions. A chaque observation correspondant à une valeur z_j de z, le point se déplace d'un pas unité parallèlement au $j^{ième}$ axe de coordonnées. Tant que ce point est situé à l'intérieur d'une zone d'indifférence définie par $d_0 < \sum_{j=1}^{m} a_j n_j < d_1$, la marche aléatoire se poursuit. Dès que le point sort de la zone d'indifférence, une des hypothèses est acceptée . A $\sum_{j=1}^{m} a_j n_j \leq d_0$ correspond l'acceptation de l'hypothèse H_0 et à $\sum_{j=1}^{m} a_j n_j \geq d_1$ correspond l'acceptation de l'hypothèse H_1 .

Lerme II 1 :

Hypothèses : Soit le système (1)

$$(1) \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = d \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = n \end{cases}$$

où sont connus $a_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ $d \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, les a_j n'étant pas tous égaux.

Supposons que le système (1) admette une solution entière.

Conclusion : le système (1) admet une infinité dénombrable de solutions entières pour $m > 2$.

Démonstration : Supposons que le système (1) admette une solution entière k_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. S'il existe d'autres solutions entières du système (1) , elles sont de la forme $k_j + \ell_j$, avec ℓ_j satisfaisant (2)

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j \ell_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} \ell_j = 0 \end{cases}$$

Si le système (2) admet une solution entière non nulle, on pourra affirmer que le système (1) admet une solution entière différente de k_j .

Le système (3) est une solution entière du système (2)

$$(3)\quad \begin{cases} \ell_1 = h(a_m - a_2) \\ \ell_j = h(a_{j-1} - a_j) \qquad j = 2, 3, \ldots, m-1 \\ \ell_m = h(a_{m-1} - a_1) \\ h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Cette solution est non nulle car les coefficients a_j ne sont pas tous égaux. D'où le système (2) admet une infinité dénombrable de solutions entières ce qui entraine l'existence d'une infinité dénombrable de solutions entières pour le système (1) .

Remarque II 1 : l'égalité des a_j a la signification statistique suivante :

L'égalité des a_j entraine celle des z_j. Or $z_j = \text{Log} \dfrac{p(x_i,\theta_1)}{p(x_i,\theta_0)}$ avec $x_i \in D_j$. (D_j est l'ensemble des x_i tels que $z = z_j$).

Soit $p(x_i,\theta_1) = k\, p(x_i,\theta_0)$ $\forall x_i \in D_j$ et $\forall D_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

$$\sum_{x_i \in \overline{\bigcup_j D_j}} p(x_i, \theta_1) = k \sum_{x_i \in \overline{\bigcup_j D_j}} p(x_i,\theta_0)$$

Or $$\sum_{x_i \in \overline{\bigcup_j D_j}} p(x_i,\theta_1) = k \sum_{x_i \in \overline{\bigcup_j D_j}} p(x_i,\theta_0) = 1$$

D'où l'égalité des a_j n'est possible que si $k = 1$, soit $z_j = 0$ $j = 1, 2, \ldots, m$, donc $a_j = 0$ $j = 1, 2, \ldots, m$

L'égalité des a_j est donc telle que $p(x_i,\theta_1) = p(x_i,\theta_0)$ pour tout $x_i \in \bigcup_j D_j$ ce qui signifie que les hypothèses H_0 et H_1 sont confondues.(Car nous supposerons toujours que $\theta_1 \neq \theta_0 \Longrightarrow \exists x_i \in \bigcup_j D_j$, tel que $p(x_i,\theta_1) \neq p(x_i,\theta_0)$) . Dans ce cas le test n'a pas de sens.

Lemme II 2 :

Hypothèses : Soit le système (4)

$$(4) \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = d \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = 0 \end{cases}$$

$d \in \mathbb{Z}$, $a_j \in \mathbb{Z}$ $j = 1, 2, \ldots, m$. Les coefficients a_j ne sont pas tous de même signe.

Supposons que le système (4) admette une solution entière k_j.

Conclusion : il existe une infinité dénombrable d'entiers positifs f tels que le système (5)

$$(5) \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j n'_j = d \\ \sum_{j=1}^{m} n'_j = f \end{cases}$$

admette une solution entière $k_j + \lambda_j \geq k_j$ $j = 1, 2, \ldots, m$

Démonstration : Soit k_j , $j = 1, 2, \ldots, m$ une solution entière du système (4) Si le système (5) a une solution entière elle peut s'écrire $k_j + \lambda_j$ $j = 1, 2, \ldots, m$. D'où le système (5) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j (k_j + \lambda_j) = d \\ \sum_{j=1}^{m} (k_j + \lambda_j) = f \end{cases}$$

Ce qui se réduit à

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = f \end{cases}$$

Si l'on arrive à prouver qu'il existe une infinité dénombrable de valeurs entières positives de f telles que le système (6) admette une solution entière, le théorème est démontré.

On sait que les coefficients a_j ne sont pas tous de même signe.

Soit $a_h > 0 > a_k$

Une famille de solutions entières du système (6) est :

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda_h = -\mu a_k \\ \lambda_k = \mu a_h \\ \lambda_j = 0 \qquad j \neq h,\ j \neq k \end{cases}$$

$\mu \in \mathbb{N}$ entraine $\lambda_h > 0$ et $\lambda_k > 0$

or $f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = \mu(a_h - a_k)$

d'où $f > 0$

Remarque II 2 : Nous avons vu précédemment que les coefficients a_j ne pouvaient être tous égaux . Pour des raisons analogues, ils ne peuvent être tous positifs. En effet si les a_j sont tous positifs, il en est de même pour tous les z_j .

D'où $\text{Log} \dfrac{p(x_i,\theta_1)}{p(x_i,\theta_0)} > 0 \qquad \forall x_i \in \bigcup_j D_j$

Soit $p(x_i,\theta_1) > p(x_i,\theta_0) \quad \forall x_i \in \bigcup_j D_j$

et $$\sum_{x_i \in \bigcup_j D_j} p(x_i,\theta_1) > \sum_{x_i \in \bigcup_j D_j} p(x_i,\theta_0)$$

Ce qui est impossible car nous avons

$$\sum_{x_i \in \bigcup_j D_j} p(x_i,\theta_1) = \sum_{x_i \in \bigcup_j D_j} p(x_i,\theta_0) = 1$$

Remarque II 3 : Dans le lemme II 2 nous nous sommes volontairement limités aux valeurs positives de f et aux solutions entières du système (5) supérieures à celles du système (4) pour rester dans le cadre du problème statistique. En effet, un nombre d'observations est un entier essentiellement positif.

Remarque II 4 : On démontre aisément que si le système (5)

$$(5) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j n'_j = d \\ \sum_{j=1}^{m} n'_j = f \end{cases}$$

admet des solutions entières pour une infinité dénombrable de valeurs de f, le système (4)

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = d \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = 0 \end{cases}$$

admet une solution entière.

Lemme II 3 :

Hypothèses : Soit le système (8)

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j\, n'_j = d \\ \sum_{j=1}^{m} n'_j = f \end{cases}$$

$d \in \mathbb{Z}$, $a_j \in \mathbb{Z}$ $j = 1, 2, \ldots, m$. Les coefficients a_j n'étant pas tous de même signe, f étant un des entiers positifs définis dans le lemme II 2.

Supposons que le système (8) admette une solution entière pour $d \in \,]d_0 , d_1[$.

Soit $\{\delta_1 , \delta_2 , \ldots, \delta_s\}$ l'ensemble des s valeurs entières de d' appartenant à l'intervalle $]d_0 , d_1[$ et telles que le système (9) admette une solution entière.

$$(9)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j\, n_j = d' \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = 0 \end{cases}$$

Conclusion :

$$d \in \{\delta_1 , \delta_2 , \ldots, \delta_s\}$$

Démonstration : En posant $n'_j = n_j + \lambda_j$, $j = 1, 2 , \ldots, m$

le système (8) s'écrit

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j(n_j + \lambda_j) = d \\ \sum_{j=1}^{m} (n_j + \lambda_j) = f \end{cases}$$

f étant défini comme dans le lemme II 2, le système (10) admet une solution entière non nulle .

$$(10)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = f \end{cases}$$

Par exemple pour $a_h > 0 > a_k$, si l'on pose $f = \mu(a_h - a_k)$, la solution entière est :

$$\begin{cases} \lambda_h = -\mu a_k \\ \lambda_k = \mu a_h \\ \lambda_j = 0 \qquad j \neq h,\ j \neq k \end{cases}$$

d'où si les systèmes (8) et (10) admettent une solution entière, le système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = d \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = 0 \end{cases}$$

admet une solution entière.

D'où d fait partie de l'ensemble des entiers appartenant à l'intervalle $]d_0 , d_1[$ pour lesquels, le système (9) admet une solution entière .

$$d \in \{\delta_1 , \delta_2 , \ldots\ldots , \delta_s$$

Remarque II 5 : Supposons que le système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j \mu_j = \delta_\ell \\ \sum_{j=1}^{m} \mu_j = f \end{cases}$$

et le système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j \nu_j = \delta_\ell \\ \sum_{j=1}^{m} \nu_j = 0 \end{cases}$$

admettent une solution entière

Nous en déduisons que le système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j = \delta_h - \delta_\ell \\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = f \end{cases}$$

admet une solution entière.

En effet il suffit de prendre $\lambda_j = \mu_j - \nu_j \quad j = 1, 2, \ldots, m$ et la propriété est démontrée.

-II- QUASI-PERIODICITE DE LA MARCHE ALEATOIRE MA 1

Les conséquences directes des trois lemmes précédents, pour la marche aléatoire MA 1 , sont les suivantes :

Théorème II 1

Hypothèse : Nous partons d'un point $M_h(0)$, c'est-à-dire d'un point dont les coordonnées sont solutions entières du système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j \; n_j = \delta_h \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = 0 \\ \delta_h \in \{\delta_1, \; \delta_2 , \ldots , \; \delta_s\} \end{cases}$$

Conclusion : Il existe un entier positif f . (cf lemme II 2) tel que, si au bout de f pas, nous sommes restés dans la zone d'indécision définie par $d_0 < \sum_{j=1}^{m} a_j \; n_j < d_1$, la marche aléatoire a abouti obligatoirement en un point M_ℓ (f) dont les coordonnées sont solution entière du système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j \; n_j = \delta_\ell \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = f \\ \delta_\ell \in \{\delta_1, \; \delta_2 , \ldots , \; \delta_s\} \end{cases}$$

En d'autres termes, si Z(0) peut prendre s valeurs appartenant à l'intervalle $]\text{Log } B \; , \; \text{Log } A[$, il existe un entier positif f tel que Z(f) ne peut prendre qu'une des s valeurs précédentes si nous sommes restés dans la zone d'indécision.

Nous appellerons "quasi-périodicité" cette propriété de la marche aléatoire MA 1 .

Il découle de la quasi-périodicité de la marche aléatoire MA 1 et de l'indépendance des épreuves, la propriété suivante

$$\Pr\left[\text{accepter } H_i \text{ en k pas/ } Z(0)=g\delta_h\right]=\Pr\left[\text{accepter } H_i \text{ en k pas/} Z(f) = g\delta_h\right]$$

$$i = 0,1$$

$Z(\ell) = g\delta_h$ signifie que le point de départ de la marche aléatoire est tel que ses coordonnées n_j sont solution du système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = \delta_h \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = \ell \end{cases}$$

Nous pouvons en déduire par exemple :

$$\Pr\left[\text{accepter } H_i/Z(0) =g\delta_h\right] =\Pr\left[\text{accepter } H_i/Z(f) = g\delta_h\right]$$

$$i = 0,1$$

-III- FONCTION D'EFFICACITE

Notons $L_h(\theta)$, la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 pour la valeur θ du paramètre inconnu, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$, un des points dont les coordonnées sont solution entière du système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = \delta_h \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = 0 \end{cases}$$

Notons $p_{h\ell}(\theta)$ la probabilité, pour la valeur θ du paramètre inconnu, de passer en f pas, sans sortir de la zone d'indifférence, du point $M_h(0)$ à l'un des points $M_\ell(f)$ dont les coordonnées sont solution entière du système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j \; n_j = \delta_\ell \\ \sum_{j=1}^{m} n_j = f \end{cases}$$

Il existe une infinité dénombrable de solutions entières de ce dernier système, donc une infinité dénombrable de points $M_\ell(f)$, cependant en un nombre fini f de pas, nous ne pouvons seulement atteindre, à partir du point $M_h(0)$, qu'un nombre fini de ces points.

Notons $\gamma_h(\theta)$ (respectivement $\gamma_h^*(\theta)$) la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 (respectivement H_1) pour la valeur θ du paramètre inconnu, en moins de (f+1) pas, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$.

D'autre part, quel que soit le point $M_\ell(f)$ où la marche aléatoire a abouti, la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 pour la valeur θ du paramètre inconnu, sachant que la marche aléatoire repart de ce point $M_\ell(f)$ est $L_\ell(\theta)$.

D'où le système (11)

$$(11) \quad \begin{cases} L_h(\theta) = \gamma_h(\theta) + \sum_{\ell=1}^{s} p_{h\ell}(\theta) \; L_\ell(\theta) \\ h = 1, 2, \ldots, s \end{cases}$$

Soit $L(\theta)$ la matrice $(s \times 1)$ d'éléments $L_h(\theta)$
Soit $\Delta(\theta)$ la matrice $(s \times s)$ d'éléments $p_{h\ell}(\theta)$
Soit $\Gamma(\theta)$ la matrice $(s \times 1)$ d'éléments $\gamma_h(\theta)$
Soit $\Gamma^*(\theta)$ la matrice $(s \times 1)$ d'éléments $\gamma_h^*(\theta)$

Le système (11) s'écrit sous forme matricielle :

$$L(\theta) = \Gamma(\theta) + \Delta(\theta)\ L(\theta)$$

Soit $$[I - \Delta(\theta)]\ L(\theta) = \Gamma(\theta)$$

Soit Ⓗ l'ensemble des valeurs de θ telles que la probabilité de sortir de la zone d'indifférence est non nulle, quelque soit le point de départ de la marche aléatoire.

Si la matrice $\Delta(\theta)$ est irréductible, $\theta \in$ Ⓗ implique que les éléments d'au moins une de ses lignes ont une somme strictement inférieure à l'unité.

Si la matrice $\Delta(\theta)$ est réductible, elle peut être mise sous la forme

$$\Delta(\theta) = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta_{21}(\theta) & \Delta_{22}(\theta) & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Delta_{k1}(\theta) & \Delta_{k2}(\theta) & \cdots & \Delta_{kk}(\theta) \end{bmatrix}$$

où les matrices $\Delta_{ii}(\theta)$ $(i = 1,2,\ldots, k)$ sont carrées et irréductibles et toute valeur propre de $\Delta(\theta)$ est valeur propre d'une des matrices $\Delta_{ii}(\theta)$

Dans ce cas $\theta \in$ Ⓗ implique que $\Delta(\theta)$ n'a aucun élément de la diagonale principale égal à un et que les éléments d'au moins une des lignes de chaque matrice $\Delta_{ii}(\theta)$ $(i = 1,2,\ldots, k)$ ont une somme strictement inférieure à l'unité .

Nous pouvons alors utiliser le théorème suivant :

Théorème de PERRON-FROBENIUS [9] [13]

Hypothèse : Soit A une matrice $(k \times k)$ irréductible à éléments non négatifs

Conclusions :

1°) A a une valeur propre simple positive λ_1 qui possède les propriétés suivantes :

a) Il correspond à λ_1 un vecteur propre dont tous les éléments sont positifs.

b) Si λ est une autre valeur propre de A, $|\lambda| \leq \lambda_1$

c) λ_1 croît si un quelconque des éléments de A croît.

d) $\lambda_1 \leq \max_j \left(\sum_k a_{jk} \right)$

$\lambda_1 \leq \max_k \left(\sum_j a_{jk} \right)$

2°) Si B est une matrice d'éléments $b_{ij} \in \mathbb{C}$ et B^* une matrice d'éléments $|b_{ij}|$

Si $|b_{ij}| \leq a_{ij}$ $\quad i,j = 1,2,\ldots,k$

toute valeur propre μ de B est telle que $|\mu| \leq \lambda_1$

Si pour une valeur propre μ, $|\mu| = \lambda_1$ alors $B^* = A$

Or $\Delta(\theta)$ est une matrice à éléments non négatifs

Nous pouvons construire, en ajoutant aux éléments de $\Delta(\theta)$ des quantités réelles positives ou nulles, une matrice A stochastique.

$\theta \in$ (H) implique donc que toutes les valeurs propres de $\Delta(\theta)$ sont de module strictement inférieur à l'unité.

Soit μ une valeur propre de $\Delta(\theta)$

$1 - \mu$ est donc valeur propre de $[I - \Delta(\theta)]$

A toute valeur propre μ de $\Delta(\theta)$, correspond donc une valeur propre $1 - \mu$ de $[I - \Delta(\theta)]$. Comme $\Delta(\theta)$ a toutes ses valeurs propres de module strictement inférieure à 1, nous pouvons affirmer que la matrice $[I - \Delta(\theta)]$ n'a pas de valeur propre nulle ; elle est donc régulière.

D'où l'expression de $L(\theta)$

$$L(\theta) = [I - \Delta(\theta)]^{-1} \Gamma(\theta)$$

On retrouve facilement par cette méthode la propriété du test séquentiel du rapport des probabilités de permettre de prendre une décision avec une probabilité 1 .

Soit $S_h(\theta)$ la probabilité de ne pas prendre de décision (c'est-à-dire de rester dans la zone d'indifférence) pour la valeur θ du paramètre inconnu, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$

Soit $S(\theta)$ la matrice $(s \times 1)$ d'éléments $S_h(\theta)$

$$S_h(\theta) = \sum_{\ell=1}^{s} p_{h\ell}(\theta) \; S_\ell(\theta)$$

d'où

$$S(\theta) = \Delta(\theta) \; S(\theta)$$

soit

$$[I - \Delta(\theta)] \; S(\theta) = [C0]$$

avec $[C0]$ matrice colonne $(s \times 1)$ d'éléments nuls

$$S(\theta) = [I - \Delta(\theta)]^{-1} \; [C0]$$

$$S(\theta) = [C0]$$

La probabilité de ne pas prendre de décision est nulle quelque soit le point de départ de la marche aléatoire pour $\theta \in (H)$.

Soit N la variable aléatoire représentant le nombre d'observations nécessaires pour sortir de la zone d'indifférence, c'est-à-dire le nombre de tirages nécessaires pour accepter les hypothèses H_0 ou H_1 .

-IV- FONCTION CARACTERISTIQUE DE N.

Appelons $\Phi_h(t,\theta) = E_h(e^{itN}, \theta)$ la fonction caractéristique de N, pour la valeur θ du paramètre inconnu, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$

$$\Phi_h(t,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{itn} \Pr\left[N = n \,/\, \theta,\ M_h(0)\right]$$

$$\Phi_h(t,\theta) = \sum_{n=1}^{f} e^{itn} \Pr\left[N=n/\theta, M_h(0)\right] + \sum_{n=f+1}^{+\infty} e^{itn} \Pr\left[N=n/\theta, M_h(0)\right]$$

Posons $U_h(t,\theta) = \sum_{n=1}^{f} e^{itn} \Pr\left[N = n/\theta, M_h(0)\right]$

d'où $\Phi_h(t,\theta) = U_h(t,\theta) + \sum_{n=f+1}^{+\infty} e^{itn} \Pr\left[N = n/\theta, M_h(0)\right]$

soit $\Phi_h(t,\theta) = U_h(t,\theta) + \sum_{\nu=1}^{+\infty} e^{itf}\, e^{it\nu} \Pr\left[N = f + \nu/\theta, M_h(0)\right]$

Posons $N^* = N - f$

$$\Pr\left[N = f + \nu/\theta, M_h(0)\right] = \sum_{\ell=1}^{S} p_{h\ell}(\theta) \Pr\left[N^* = \nu/\theta, M_\ell(f)\right]$$

$$\Phi_h(t,\theta) = U_h(t,\theta) + e^{itf} \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{it\nu} \sum_{\ell=1}^{S} p_{h\ell}(\theta) \Pr\left[N^* = \nu/\theta, M(f)\right]$$

$$\Phi_h(t,\theta) = U_h(t,\theta) + e^{itf} \sum_{\ell=1}^{S} p_{h\ell}(\theta) \sum_{\nu=1}^{+\infty} e^{it\nu} \Pr\left[N^* = \nu/\theta, M_\ell(f)\right]$$

or $\Pr\left[N^* = \nu/\theta, M_\ell(f)\right] = \Pr\left[N = \nu/\theta, M_\ell(0)\right]$

d'où $\Phi_h(t,\theta) = U_h(t,\theta) + e^{itf} \sum_{\ell=1}^{S} p_{h\ell}(\theta) \sum_{\nu=1}^{+\infty} e^{it\nu} \Pr\left[N = \nu/\theta, M_\ell(0)\right]$

$$\Phi_h(t,\theta) = U_h(t,\theta) + e^{itf} \sum_{\ell=1}^{S} p_{h\ell}(\theta)\ \Phi_\ell(t,\theta)$$

Soit $\Phi(t,\theta)$ la matrice $(s \times 1)$ d'éléments $\Phi_h(t,\theta)$

Soit $U(t,\theta)$ la matrice $(s \times 1)$ d'éléments $U_h(t,\theta)$

Nous pouvons écrire la relation matricielle

$$\Phi(t,\theta) = U(t,\theta) + e^{itf}\ \Delta(\theta)\ \ \Phi(t,\theta)$$

Soit $$\left[I - e^{ift}\ \Delta(\theta)\right]\ \Phi(t,\theta) = U(t,\theta)$$

Le module des valeurs propres de la matrice $e^{ift}\ \Delta(\theta)$,(t réel) étant strictement inférieur à l'unité (théorème de PERRON-FROBENIUS), la matrice $\left[I - e^{ift}\ \Delta(\theta)\right]$ n'a pas de valeur propre nulle et peut donc être inversée, d'où l'expression de $\Phi(t,\theta)$:

$$\Phi(t,\theta) = \left[I - e^{ift}\ \Delta(\theta)\right]^{-1}\ U(t,\theta)$$

-V- NOMBRE MOYEN D'OBSERVATIONS

Posons $$R(t,\theta) = \left[I - e^{ift}\ \Delta(\theta)\right]$$

d'où $$\Phi(t,\theta) = R^{-1}(t,\theta)\ \ U(t,\theta)$$

Soit $E_h(N,\theta)$ l'espérance mathématique de N, pour la valeur θ du paramètre inconnu, sachant que $M_h(0)$ est le point de départ de la marche aléatoire.

Soit $E(N,\theta)$ la matrice $(s \times 1)$ d'éléments $E_h(N,\theta)$

Soit $\Phi(t,\theta) = U(t,\theta) + e^{itf}\ \Delta(\theta)\ \Phi(t,\theta)$

Dérivons par rapport à t les deux termes de cette relation

$$\frac{\partial \Phi(t,\theta)}{\partial t} = \frac{\partial U(t,\theta)}{\partial t} + if\, e^{itf}\ \Delta(\theta)\ \Phi(t,\theta) + e^{itf}\Delta(\theta)\ \frac{\partial \Phi(t,\theta)}{\partial t}$$

or $$E(N,\theta) = \frac{1}{i}\ \left[\frac{\partial \Phi(t,\theta)}{\partial t}\right]_{t=0}$$

Si nous posons $$V(0,\theta) = \frac{1}{i}\ \left[\frac{\partial U(t,\theta)}{\partial t}\right]_{t=0}$$

nous avons $E(N,\theta) = V(0,\theta) + f\,\Delta(\theta)\ [C1] + \Delta(\theta)\,E(N,\theta)$

soit $R(0,\theta)\,E(N,\theta) = f\Delta(\theta)\ [C1] + V(0,\theta)$

d'où l'expression de $E(N,\theta)$

$$E(N,\theta) = fR^{-1}(0,\theta)\,\Delta(\theta)\ [C1] + R^{-1}(0,\theta)\,V(0,\theta)$$

On pourrait de la même façon calculer les moments de N d'ordre supérieur .

La méthode précédente, comme la méthode de WALD, s'applique aux tests d'hypothèses simples sur des variables aléatoires telles que

$z_i = \text{Log}\ \dfrac{f(x_i,\theta_1)}{f(x_i,\theta_0)}$ peut prendre un nombre fini de valeurs

Un exemple immédiat de loi satisfaisant à cette condition est fourni par un échantillonnage multinomial [19] . Mais il existe d'autres lois ayant la même propriété.

Voici un exemple simple. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Posons $\Pr\ [X = i] = p_i$

et soit $h \in [0,1]$ tel que $p_1 + p_2 = 1 - h$

D'autre part posons

$$p_{2\ell+1} = p_1\ h^{\ell}$$

$$p_{2\ell+2} = p_2\ h^{\ell}$$

Nous avons bien $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$

Soit l'hypothèse H_0 $\quad p_1 = {}^0p_1 \quad$ et $\quad p_2 = {}^0p_2$

Soit l'hypothèse H_1 $\quad p_1 = {}^1p_1 \quad$ et $\quad p_2 = {}^1p_2$

$$z_{2\ell+1} = \text{Log} \frac{{}^1p_1 \, h^\ell}{{}^0p_1 \, h^\ell} = \text{Log} \frac{{}^1p_1}{{}^0p_1} \qquad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

$$z_{2\ell+2} = \text{Log} \frac{{}^1p_2 \, h^\ell}{{}^0p_2 \, h^\ell} = \text{Log} \frac{{}^1p_2}{{}^0p_2} \qquad \forall \ell \in \mathbb{N}$$

z_i n'a donc que deux valeurs $\text{Log} \frac{{}^1p_1}{{}^0p_1}$ et $\text{Log} \frac{{}^1p_2}{{}^0p_2}$

-VI- APPLICATION : Nous avons choisi comme application un exemple donné par POLYA [36] et cité par MERIC [32]

Soit le test séquentiel du rapport des probabilités appliqué à un échantillon binomial.

La probabilité d'un échantillon comprenant n_1 "succès" et n_2 "échecs", pour $n_1 + n_2 = n$ tirages est $p^{n_1} (1 - p)^{n_2}$

si p est la probabilité d'avoir un succès dans une épreuve.

L'hypothèse H_0 est $p = p_0$

L'hypothèse H_1 est $p = p_1$

d'où $z_1 = \text{Log} \frac{p_1}{p_0}$ et $z_2 = \text{Log} \frac{1-p_1}{1-p_0}$

soit $Z_n = n_1 \text{ Log } \frac{p_1}{p_0} + n_2 \text{ Log } \frac{1 - p_1}{1 - p_0}$

La zone d'indifférence est telle que $\text{Log } B < Z_n < \text{Log } A \qquad n \in \mathbb{N}$

Si $\text{Log } \frac{p_1}{p_0}$ et $\text{Log } \frac{1-p_1}{1-p_0}$ sont multiples entiers d'un même réel, la zone d'indifférence peut être définie par :

$$d_0 < a_1 n_1 + a_2 n_2 < d_1$$

avec $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $a_1 a_2 < 0$ et $d_0 \in \mathbb{R}$, $d_1 \in \mathbb{R}$ tels que $d_0 < 0 < d_1$

L'exemple numérique de POLYA est défini par :

$$\begin{cases} d_1 = - d_0 = 6 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = - 1 \end{cases}$$

d'où $- 6 < 3n_1 - n_2 < + 6$ définit la zone d'indifférence (cf figure II-1)

Calcul de la fonction d'éfficacité

Si $q = 1 - p$

$$\Delta(p) = \begin{bmatrix} 2pq^3 & q^4 & 0 \\ 5p^2q^2 & 4pq^3 & q^4 \\ 4p^3q & 5p^2q^2 & 2pq^3 \end{bmatrix}$$

$$(\Gamma) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q^2 \end{bmatrix} \qquad \Gamma^*(p) = \begin{bmatrix} p + pq + p^2q^2 \\ p^2 + 2pq^3 \\ p^4 \end{bmatrix}$$

Les matrices $\Delta(p)$, $\Gamma(p)$ et $\Gamma^{*}(p)$ sont définies page 31 .

$$[I - \Delta(p)] = \begin{bmatrix} 1 - 2pq^3 & - q^4 & 0 \\ - 5p^2q^2 & 1 - 4pq^3 & -q^4 \\ - 4p^3q & -5p^2q^2 & 1 - 2pq^3 \end{bmatrix}$$

et $\det[I - \Delta(p)] = 1 - 8\,pq^3 + 10\,p^2q^6$

$$[I-\Delta(p)]^{-1} = \frac{1}{1-8pq^3+10p^2q^6} \begin{bmatrix} 1 - 6pq^3 + 3p^2q^6 & q^4 - 2pq^7 & q^8 \\ 5p^2q^2 - 6p^3q^5 & 1-4pq^3 + 4p^2q^6 & q^4 - 2pq^7 \\ 4p^3q^2 + 9p^4q^4 & 5p^2q^2 - 6p^3q^5 & 1 - 6pq^3 + 3\,p^2q^6 \end{bmatrix}$$

$$L(p) = [I - \Delta(p)]^{-1} \Gamma(p)$$

$$L(p) = \frac{1}{1-8pq^3+10p^2q^6} \begin{bmatrix} q^{10} \\ q^6(1 - 2pq^3) \\ q^2(1 - 6pq^3 + 3p^2q^6) \end{bmatrix}$$

Calcul du nombre moyen d'observations

$$U(t,p) = \begin{bmatrix} pe^{it} + pq\,e^{2it} + p^2q^2\,e^{4it} \\ p^2\,e^{2it} + 2pq^3\,e^{4it} \\ q^2\,e^{2it} + p^4\,e^{4it} \end{bmatrix}$$

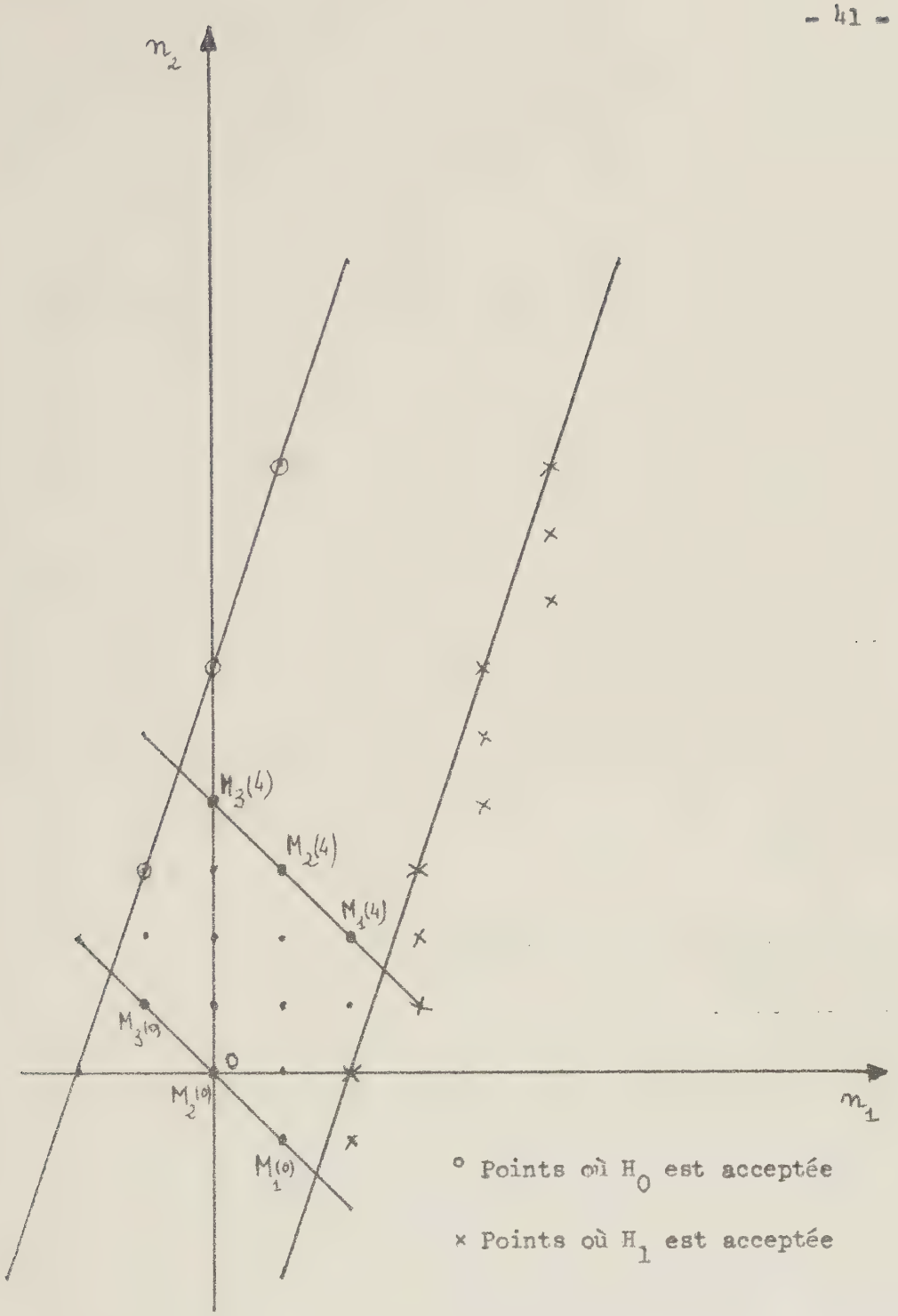

n_2
n_1
$M_3(4)$
$M_2(4)$
$M_1(4)$
$M_3(0)$
$M_2(0)$
$M_1(0)$
0
° Points où H_0 est acceptée
× Points où H_1 est acceptée

FIGURE II -1

d'où

$$V(0,p) = \begin{bmatrix} p + 2pq + 4p^2q^2 \\ 2p^2 + 8pq^3 \\ 2q^2 + 4p^4 \end{bmatrix}$$

$$E(N,p) = f\, R^{-1}(0,p)\, \Delta(p) \quad [C1] + R^{-1}(0,p)\, V(0,p)$$

On trouve :

$$C(N,p) = \frac{1}{1-8pq^3+10p^2q^6} \begin{bmatrix} p+pq+4p^2q^2+8pq^3+4q^4-6p^2q^3\ 4p^2q^4-24p^3q^5+28p^2q^6+4q8+3p^3q^6 \\ +2q^{10}-p^3q^7+16p^4q^8-16p^2q^{10} \\ \\ 2p^2+20p^2q^2+24pq^3+4q^4+5p^3q^2+2q^6-3p^3-24p^3q^5-56p^2q^6-8pq^7 \\ +24p^4q^4-6p^4q^5+2p^4q^6-4pq^9+32p^3q^9-32p^5q^7 \\ \\ 2q^2+4p^4+16p^3q+20p^2q^2+8pq^3+4p^4q+14p^4q^2-12pq^5+36p^4q^4+16p^3q^5 \\ -28p^2q^6-8p^5q^3-9p^5q^4-21p^5q^5+6p^2q^8-48p^4q^8-24p^6q^6 \end{bmatrix}$$

C. METHODE LIEE A LA MARCHE ALEATOIRE MA 2

-I- PRELIMINAIRES

Nous exposons maintenant une méthode de calcul des caractéristique exactes d'un test séquentiel du rapport des probabilités sur le paramètre de certaines variables aléatoires. Cette méthode est voisine techniquement de celle étudiée plus haut, mais utilise les propriétés d'une marche aléatoi de type différent.

Nous étudions le test d'hypothèses sur le paramètre de variables aléatoires appartenant à une restriction de la famille exponentielle discrète. Ces variables aléatoires peuvent prendre une infinité dénombrable de valeurs $x_i \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\Pr[X=x_i,\theta] = f(x_i,\theta) = \exp\left[\sum_{j=1}^{m} A_j(\theta)\, B_j(x_i) + C(\theta) + D(x_i)\right]$$

où les fonctions B_j $(j=1,2,\ldots,m)$ sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$

Dans ce cas z_i peut prendre une infinité dénombrable de valeurs.

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} [A_j(\theta_1) - A_j(\theta_0)]\, B_j(x_i) + [C(\theta_1) - C(\theta_0)]$$

or
$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

donc
$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [A_j(\theta_1)-A_j(\theta_0)]\, B_j(x_i) + n\, [C(\theta_1) - C(\theta_0)]$$

$$Z_n = \sum_{j=1}^{m} [A_j(\theta_1)-A_j(\theta_0)] \left[\sum_{i=1}^{n} B_j(x_i)\right] + n\, [C(\theta_1) - C(\theta_0)]$$

Posons $n_j = \sum_{i=1}^{n} B_j(x_i)$

$$n_j \in \mathbb{Z} \qquad \forall\ j = 1,2,\ldots,m$$

$$Z_n = \sum_{j=1}^{m} [A_j(\theta_1) - A_j(\theta_0)]\, n_j + n\, [C(\theta_1) - C(\theta_0)]$$

La règle de décision est toujours :

Tant que $\text{Log } B < Z_n < \text{Log } A$ une observation supplémentaire est nécessaire

Dès que $Z_n \leq \text{Log } B$ $\quad H_0$ est acceptée

Dès que $Z_n \geq \text{Log } A$ $\quad H_1$ est acceptée

Dans le cas où l'on peut écrire (Condition C)

$$\begin{cases} A_j(\theta_1) - A_j(\theta_0) = a_j\, g \\ C(\theta_1) - C(\theta_0) = c\, g \\ g \in \mathbb{R}\ ,\ a_j \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

la règle de décision devient :

$$\begin{cases} \text{tant que } d_0 < \sum_{j=1}^{m} a_j\, n_j + nc < d_1 \text{ une observation supplémentaire est nécessaire} \\ \text{Dès que } \sum_{j=1}^{m} a_j\, n_j + nc \leq d_0 \text{ l'hypothèse } H_0 \text{ est acceptée} \\ \text{Dès que } \sum_{j=1}^{m} a_j\, n_j + nc \geq d_1 \text{ l'hypothèse } H_1 \text{ est acceptée} \end{cases}$$

avec $d_0 \in \mathbb{R}$, $d_1 \in \mathbb{R}$ tels que $d_0 < 0 < d_1$

Nous considérons maintenant la marche aléatoire MA 2 d'un point M(n) de de coordonnées $(n_1, n_2, \ldots, n_m, n)$ dans un espace euclidien à m+1 dimensions. A chaque observation, le point M(n) subit une translation définie par un vecteur de composantes $[B_1(x_i)\ ,\ B_2(x_i)\ ,\ldots\ldots,\ B_m(x_i),\ 1]$.

Tant que le point reste dans la zone d'indifférence, définie par $d_0 < \sum_{j=1}^{m} a_j\, n_j + nc < d_1$, la marche aléatoire se poursuit.

Dans le cas contraire, la marche aléatoire est arrêtée et nous sommes conduits à l'acceptation de l'une des deux hypothèses H_0 ou H_1 .

Lemme II 4

Hypothèses : Soit l'équation

$$(12) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_j n_j + nc = d$$

où $d \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Z}$, $a_j \in \mathbb{Z}$ $j=1,2,\ldots,m$ sont connus et tels que les a_j ne sont pas tous égaux.

Supposons que l'équation (12) admette une solution entière.

Conclusion : L'équation (12) admet une infinité dénombrable de solutions entières.

Démonstration : Supposons que l'équation (12) admette une solution entière $(k_1, k_2, \ldots\ldots\ldots, k_m)$

Posons $n_j = k_j + \ell_j \qquad j = 1,2,\ldots\ldots,m$

Nous obtenons

$$(13) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_j \ell_j = 0$$

Si l'équation (13) admet une infinité dénombrable de solutions entières, le lemme est démontré.

Or le système (14) est solution entière de l'équation (13)

$$(14) \quad \begin{cases} \ell_1 = h(a_m - a_2) \\ \ell_j = h(a_{j-1} - a_j) \qquad j = 2,3,\ldots\ldots\ldots, m-1 \\ \ell_m = h(a_{m-1} - a_1) \end{cases}$$

$$h \in \mathbb{Z}$$

Les coefficients a_j n'étant pas tous égaux, l'équation (13) et donc l'équation (12) admettent bien une infinité dénombrable de solutions entières.

Lemme II 5

Hypothèses : Soit l'équation

$$(15) \quad \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = d$$

où $d \in \mathbb{Z}$ et $a_j \in \mathbb{Z}$ $j = 1,2,\ldots\ldots,m$ sont connus

Supposons que l'équation (15) admette une solution entière $(k_1,\ldots,k_m)$

Conclusion : il existe une infinité dénombrable d'entiers positifs f tels que l'équation (16)

$$(16) \quad \sum_{j=1}^{m} a_j n'_j + cf = d \qquad (c \in \mathbb{Z})$$

admet une solution entière.

Démonstration : Posons $n'_j = k_j + \lambda_j$ $j = 1,2,\ldots\ldots, m$

L'équation (16) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j k_j + \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j + cf = d$$

Comme $(k_1,\ldots\ldots, k_m)$ est solution entière de l'équation (15)

$$\sum_{j=1}^{m} a_j k_j = d$$

d'où l'équation (17)

$$(17) \quad \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j + cf = 0$$

Soit $f = - \dfrac{\sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j}{c}$

Parmi les coefficients a_j choisissons $a_h \neq 0$

Une solution de l'équation (17) est donnée par

$$\begin{cases} \lambda_j = 0 & j \neq h \\ \lambda_h = - c\mu & \mu \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soit $f = \mu a_h$

Si $a_h > 0$ nous prendrons $\mu > 0$

Si $a_h < 0$ nous prendrons $\mu < 0$

Nous obtenons donc une infinité dénombrable de valeurs entières positives pour f.

Remarque II 6

On démontre aisément que réciproquement si l'équation (16)

$$(16) \quad \sum_{j=1}^{m} a_j n_j + cf = d$$

admet une solution entière pour une infinité dénombrable de valeurs de f, l'équation (15)

$$(15) \quad \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = d$$

admet une solution entière.

Lemme II 6

Hypothèses : Soit l'équation

$$(18) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_j n'_j + cf = d$$

$d \in \mathbb{Z}$, $a_j \in \mathbb{Z}$ $j = 1,2,\ldots\ldots,m$ f est défini par le lemme II 6

Supposons que l'équation (18) admette une solution entière pour $d \in]d_0, d_1[$.

Soit $\{\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_s\}$ l'ensemble des s valeurs entières de d' telles que l'équation (19) admette une solution entière

$$(19) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = d'$$

Conclusion :

$$d \in \{\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_s\}$$

Démonstration : Posons $n'_j = n_j + \lambda_j$ $j = 1,2,\ldots\ldots, m$

L'équation (18) s'écrit

$$\sum_{j=1}^{m} a_j n_j + \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda_j + cf = d$$

Si nous prenons les valeurs de f et λ_j trouvées au lemme II 6 , nous avons :

$$(20) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_j n_j + cf = 0$$

et nous sommes ramenés à :

$$(21) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = d$$

L'existence de solutions entières pour les équations (18) et (20) entraîne l'existence de solutions entières pour l'équation (21), ce qui implique $d \in \{\delta_1, \delta_2 \ldots\ldots, \delta_l\}$

Remarque II -7

Si les équations

$$\sum_{j=1}^{m} a_j n_j = \delta_\ell$$

et

$$\sum_{j=1}^{m} a_j n'_j = \delta_h$$

admettent une solution entière, il est évident que l'équation

$$\sum_{j=1}^{m} a_j x_j = \delta_h - \delta_\ell$$

admet une solution entière .

-II- QUASI-PERIODICITE DE LA MARCHE ALEATOIRE MA 2

Les conséquences des trois lemmes précédents pour la marche aléatoire MA 2 sont analogues à celles des trois premiers lemmes de ce chapitre.

Théorème II 2

Hypothèses : Nous partons d'un point $M_h(0)$, c'est-à-dire d'un des points dont les coordonnées sont solution entière de l'équation

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j n_j = \delta_h \\ \delta_h \in \{\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_s\} \end{cases}$$

Conclusion : il existe un entier positif f (cf lemme II-5) tel que, si au bout de f pas, nous sommes restés dans la zone d'indécision définie par $d_0 < \sum_{j=1}^{m} a_j n_j + nc < d_1$, la marche aléatoire a abouti obligatoirement en un point $M_\ell(f)$ dont les coordonnées sont solution entière de l'équation :

$$\sum_{j=1}^{m} a_j n_j + nc = \delta_\ell$$

$$\delta_\ell \in \{\delta_1 , \delta_2 , \ldots\ldots\ldots , \delta_s \}$$

En d'autre termes, la marche aléatoire MA 2 est quasi-périodique .

-III- CARACTERISTIQUES DU TEST

Nous utilisont ici les mêmes notations que dans le cas précédent :

Soit $L_h(\theta)$ la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 pour la valeur θ du paramètre inconnu, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$.

Soit $p_{h\ell}(\theta)$ la probabilité pour la valeur du paramètre inconnu de passer en f pas du point $M_h(0)$ à l'ensemble des points $M_\ell(f)$ dont les coordonnées sont solution entière de l'équation $\sum_{j=1}^{m} a_j n_j + cf = \delta_\ell$

Soit $\gamma_h(\theta)$ la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 pour la valeur du paramètre inconnu, en moins de (f+1) pas, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$.

Nous obtenons à nouveau la formule

$$L_h(\theta) = \gamma_h(\theta) + \sum_{\ell=1}^{s} p_{h\ell}(\theta)\, L_\ell(\theta)$$

Sous forme matricielle, nous pouvons écrire :

$$[I - \Delta(\theta)]\, L(\theta) = \Gamma(\theta)$$

Nous pouvons appliquer à la matrice $\Delta(\theta)$ le théorème de PERRON-FROBENIUS, ce qui prouve la régularité de la matrice $[I - \Delta(\theta)]$, d'où :

$$L(\theta) = [I - \Delta(\theta)]^{-1}\, \Gamma(\theta)$$

Nous obtenons de même

$$E(N,\theta) = f\, R^{-1}(0,\theta)\, \Delta(\theta)\, [C1] + R^{-1}(0,\theta)\, V(0,\theta)$$

Cette méthode trouve des applications immédiates dans des cas usuels, par exemple variables aléatoires binomiales négatives, variables aléatoires de Poisson.

-IV- APPLICATION :

Nous avons choisi comme application, le test de deux hypothèses simples sur le paramètre d'une loi de Poisson

La loi de Poisson est définie par

$$\Pr[X = i,\theta] = e^{-\theta}\, \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \qquad x_i \in \mathbb{N}$$

Les hypothèses sont : $H_0 : \theta=\theta_0$

$H_1 : \theta=\theta_1$

d'où $z_i = \theta_0 - \theta_1 + x_i \operatorname{Log} \frac{\theta_1}{\theta_0}$

$$\text{Soit } Z_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \text{Log} \frac{\theta_1}{\theta_0} + n(\theta_0 - \theta_1)$$

Si nous pouvons poser :

$$\begin{cases} n_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{Log} \dfrac{\theta_1}{\theta_0} = a_1 g \\ \theta_0 - \theta_1 = c \cdot g \end{cases}$$

La zone d'indifférence peut alors être définie par

$$d_0 < a_1 n_1 + cn < d_1$$

$d_0 \in \mathbb{R}$, $d_1 \in \mathbb{R}$ $\qquad d_0 < 0 < d_1$

Nous avons choisi $\begin{cases} d_0 = -3 \\ d_1 = 8 \\ a_1 = 4 \\ c = 1 \end{cases}$

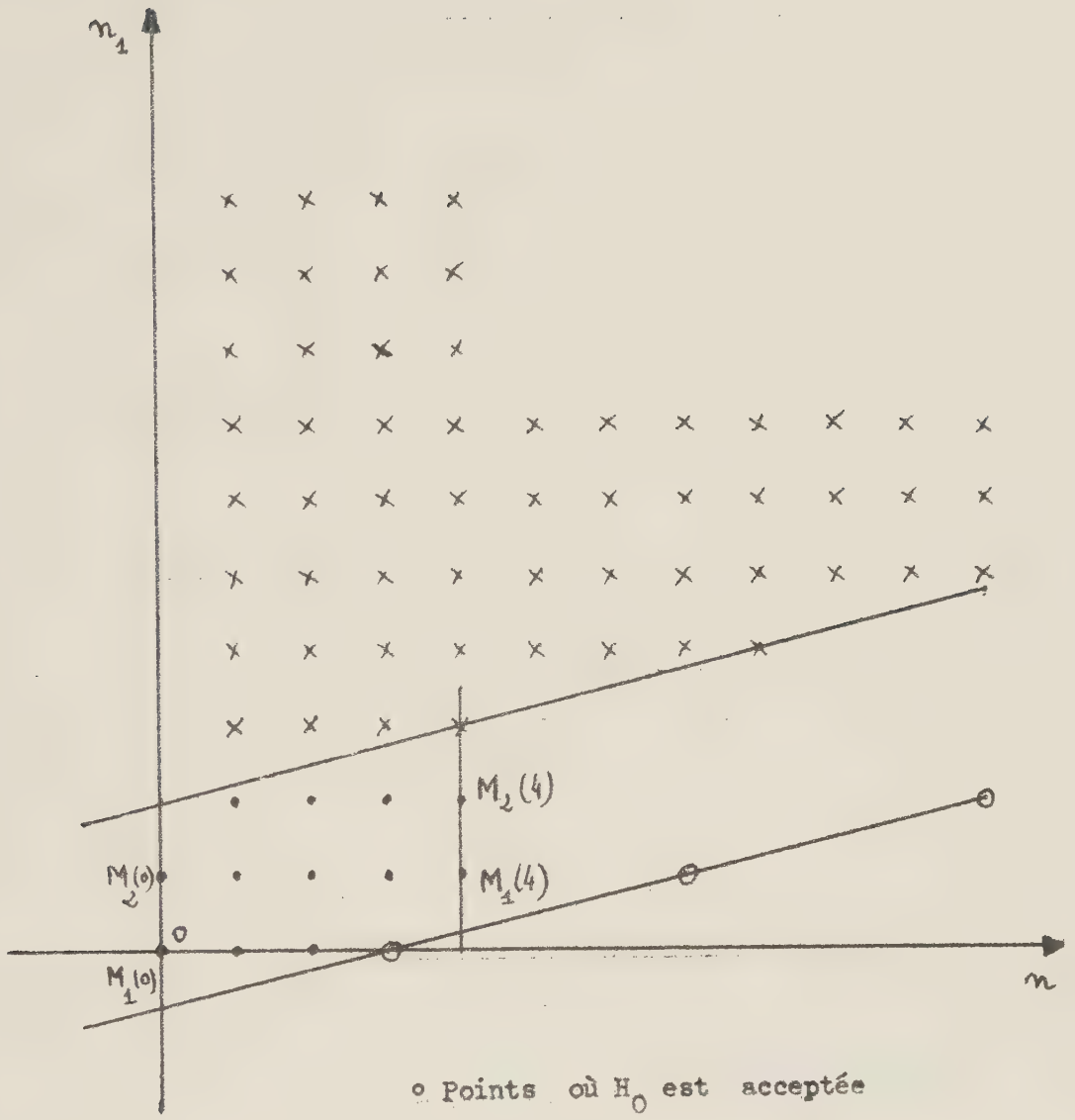
Soit $\quad -3 < 4n_1 - n < +8 \qquad$ (voir figure II-2)

$f = 4$ $\qquad \Delta(\theta) = \begin{bmatrix} 3\theta\, e^{-4\theta} & \frac{15}{2}\, \theta^2 e^{-4\theta} \\ e^{-4\theta} & 4\theta\, e^{-4\theta} \end{bmatrix}$

soit

$$[I - \Delta(\theta)] = \begin{bmatrix} 1 - 3\theta\, e^{-4\theta} & -\frac{15\theta^2}{2}\, e^{-4\theta} \\ -e^{-4\theta} & 1 - 4\theta\, e^{-4\theta} \end{bmatrix}$$

$$\det [I - \Delta(\theta)] = 1 - 7\theta\, e^{-4\theta} + \frac{9\theta^2}{2}\, e^{-8\theta}$$



o Points où H_0 est acceptée

× Points où H_1 est acceptée

FIGURE II - 2

$$\left[I - \Delta(\theta)\right]^{-1} = \frac{1}{1-7\theta\, e^{-4\theta} + \frac{9\theta^2}{2} e^{-8\theta}} \begin{bmatrix} 1 - 4\theta\ e^{-4\theta} & \frac{15\theta^2}{2} e^{-4\theta} \\ e^{-4\theta} & 1 - 3\theta\ e^{-4\theta} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-3\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcul de la fonction d'efficacité

$$L(\theta) = \left[I - \Delta(\theta)\right]^{-1} \Gamma(\theta)$$

soit

$$L(\theta) = \frac{1}{1-7\theta\, e^{-4\theta} + \frac{9\theta^2}{2} e^{-8\theta}} \begin{bmatrix} 1-4\theta\ e^{-4\theta} & \frac{15\theta^2}{2} e^{-4\theta} \\ e^{-4\theta} & 1 - 3\theta\ e^{-4\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où

$$L(\theta) = \frac{1}{1-7\theta\, e^{-4\theta} + \frac{9\theta^2}{2} e^{-8\theta}} \begin{bmatrix} e^{-3\theta}(1 - 4\theta\ e^{-4\theta}) \\ e^{-7\theta} \end{bmatrix}$$

Calcul du nombre moyen d'observations

$$E(N,\theta) = f\, R^{-1}(0,\theta)\ \Delta(\theta)\ [C1] + R^{-1}(0,\theta)\ V(0,\theta)$$

On trouve le résultat suivant :

$$E(N,\theta) = \frac{1}{1-7\,e^{-4\theta}+\frac{9\theta^2}{2}\,e^{-8\theta}} \left[\begin{array}{l} 1+e^{-\theta}(1+\theta+\frac{\theta^2}{2})+e^{-2\theta}(1-4\theta+8\theta^2)+e^{-3\theta}(9\theta+\frac{9\theta^2}{2}-6\theta^3) \\ -e^{-4\theta}(28\theta+\frac{15\theta^2}{2})-e^{-5\theta}(4\theta-\frac{7\theta^2}{2}-\frac{11\theta^3}{2})-e^{-6\theta}(4\theta-\frac{47\theta^2}{2}+17\theta^3) \\ -e^{-7\theta}(-\frac{57\theta^2}{2}-\frac{9\theta^3}{2}-24\theta^4\theta) \\ \\ 1+e^{-\theta}(1+\theta\theta)+e^{-2\theta}(1+2\theta)+e^{-3\theta}(1+3\theta)+e^{-4\theta}(1-15\theta) \\ +e^{-5\theta}(1-2\theta-\frac{5\theta^2}{2})+e^{-6\theta}(1-7\theta+2\theta^2)+e^{-7\theta}(6\theta-\frac{9\theta^2}{2}-6\theta^3) \end{array} \right]$$

D. SECONDE METHODE LIEE A LA MARCHE ALEATOIRE MA 1 DANS LE CAS BINOMIAL

-I- PRELIMINAIRES

La première méthode liée à la marche aléatoire MA 1 permet évidemment de calculer les caractéristiques exactes d'un test binomial de WALD. Mais elle est impuissante à calculer les caractéristiques exactes de tests séquentiels composés de tests binomiaux simultanés. Nous exposons donc une seconde méthode permettant de résoudre ce problème [15] [16] .

Nous considérons à nouveau le déroulement du test séquentiel comme la marche aléatoire MA 1 d'un point M(n) de coordonnées entières (x,y) dans le plan. Mais nous prenons cette fois comme point de départ de cette marche aléatoire uniquement le point origine des axes.

La zone d'indifférence est la bande située entre les droites

$$a_1 x + a_2 y = d_0$$

et

$$a_1 x + a_2 y = d_1$$

- $a_1 \in \mathbb{N}^*$ $a_2 \in \mathbb{N}^*$ si z_1 et z_2 sont des multiples entiers d'un même réel g.

Le point M(x,y) (x + y = n) se déplace par pas unité parallèlement à l'un ou l'autre des deux axes .

Reprenons les définitions de MERIC [32] et appelons frontières passives P_x et P_y de la marche aléatoire, l'ensemble des points atteints dès qu'on sort de la zone d'indécision (du côté de l'axe ox et du côté de l'axe oy) et frontière active de la marche aléatoire, l'ensemble des points de la zone d'indécision à partir desquels on peut atteindre en un pas un point de la frontière passive.

Si nous relions entre eux les points successifs de la frontière active, nous construisons deux lignes brisées. Ces lignes brisées appelées respectivement bord des x(B_x) et bord des y(B_y) représentent les chemins extêmes que le point M(n) peut parcourir sans sortir de la zone d'indécision .

D'autre part ces lignes brisées peuvent être divisées en tronçons superposables par translation parallèle au vecteur de composantes (a_2 , $|a_1|$) . (Ceci exprime la quasi-périodicité mise en évidence dans la méthode précédente).

Relions B_x et B_y par des segments équidistants L_i parallèles à la seconde bissectrice de xoy. Nous déterminons ainsi une série de tranches superposables S_i , limitées par B_x et B_y d'une part, L_i et L_{i+1} d'autre part (L_i exclu).

Appelons O_{i1} , O_{i2} ,....., O_{im} , les positions possibles de M(n) sur le segment L_i .

Appelons $N(h,k)$ le nombre de chemins possibles permettant de passer du point O_{ih} du segment L_i au point $O_{i+1,k}$ du segment L_{i+1} .

Appelons Δ la matrice carrée d'éléments $N(h,k)$. La matrice carrée Δ est la matrice de "passage" du segment L_i au segment L_{i+1} , $\forall\ i \in \mathbb{N}$. On voit aisément que la matrice de "passage" du segment L_i au segment L_{i+k} , $(k \in \mathbb{N}^*)$ est Δ^k .

Soit L_0 le premier segment construit entre B_x et B_y .

Soit N_{0j} le nombre de chemins partant de 0 et aboutissant au point O_{oj} du segment L_0 .

La matrice ligne $\Lambda = [N_{01}, N_{02}, \ldots\ldots, N_{0m}]$ représente la matrice de passage du point 0 au segment L_0 .

Les coordonnées x_0 et y_0 des points du segment L_0 vérifient

$$x_0 + y_0 = N_0$$

Les coordonnées x_k et y_k des points du segment L_k vérifient

$$x_k + y_k = N_0 + k\ (\ |a_1| + a_2\ )$$

Soit $M(x,y) \in S_k$.

Nous avons la relation :

$$N_0 + k\ (\ |a_1| + a_2) < x + y \leq N_0 + (k+1)\ (|a_1| + a_2\ )$$

Appelons $\gamma(j,M)$ le nombre de chemins partant du point O_{kj} et aboutissant au point $M(x,y) \in S_k$.

La matrice colonne Γ d'éléments $\gamma(j,M)$ $\quad j=1,2,\ldots\ldots,m$ est la matrice de "passage" du segment L_k au point $M(x,y)$

D'où le nombre de chemins $K(x,y)$ partant du Point 0 et aboutissant au point $M(x,y) \in S_k$ sans quitter la zone d'indifférence est :

$$K(x,y) = \Lambda\ \Delta^k\ \Gamma$$

-II- FONCTION D'EFFICACITE

La fonction d'efficacité L(p) est la probabilité que le point M(x,y) sorte de la zone d'indifférence en un des points de la frontière passive P_y

$$L(p) = \sum_{M(x,y) \in P_y} P(x,y)$$

P(x,y) étant la probabilité d'arriver au point de coordonnées (x,y) sans être au préalable sorti de la zone d'indifférence.

$$P(x,y) = K(x,y)\ p^x\ q^y$$

d'où

$$L(p) = \sum_{P_y} K(x,y)\ p^x\ q^y$$

considérons les a_2 premiers points de P_y ; tous les points de P_y se déduisent des précédents par une translation parallèle au vecteur de composantes $(ka_2\ ,\ k\ |a_1|\ )\ k \in \mathbb{N}^*$

x_{1h} et y_{1h} étant les coordonnées du hème des a_2 premiers points de P_y Γ_{1h} étant la matrice colonne non nulle de "passage" du segment L_k au point de P_y compris entre les segments L_k et L_{k+1} et homologue par translation du point $(x_{1h}\ ,\ y_{1h})$, nous obtenons

$$L(p) = \sum_{h=1}^{a_2} \left(\Lambda I\ \Gamma_{1h}\ p^{x_{1h}}\ q^{y_{1h}} + \Lambda\Delta\Gamma_{1h}\ p^{x_{1h}} q^{y_{1h}}\ u + \ldots + \Lambda\Delta^k\ \Gamma_{1h} p^{x_{1h}} q^{y_{1h}}\ u^k + \ldots \right)$$

avec $u = p^{a_2}\ q^{|a_1|}$

Soit

$$L(p) = \Lambda(I + \Delta u + \Delta^2\ u^2 + \ldots + \Delta^k\ u^k + \ldots)\ \sum_{h=1}^{a_2} p^{x_{1h}}\ q^{y_{1h}}\ \Gamma_{1h}$$

Démonstration de la convergence de la série géométrique de matrices de terme général $\Delta^k\ u^k$.

Si nous prenons des tranches superposables de la zone d'indécision constituées par s de celles qui ont été choisies précédemment, nous pouvons écrire la fonction d'efficacité de la façon suivante :

$$L(p) = \psi(p) + \Lambda^*\ (I + Aw + A^2\ w^2 + \ldots + A^r\ w^r + \ldots)\ \Gamma^*$$

Nous choisissons l'entier positif s de telle sorte que la matrice $(m \times 1)$ Γ^* soit à éléments strictement positifs.

Nous choisissons le premier segment L_0^* tel que la matrice $(1 \times m)\Lambda^*$ soit à éléments strictement positifs.

$\psi(p)$ est la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 avant le segment L_0^* ou sur son prolongement.

De plus

$$A = \Delta^s$$

$$w = u^s$$

Comme $L(p) \in [0,1]$, et $\psi(p) \in [0,1]$ de telle sorte que $L(p) - \psi(p) \in [0,1]$, comme les éléments des matrices Λ^* et Γ^* sont strictement positifs, la série géométrique de matrices de terme général $A^r w^r$ est convergente, d'où

$$\lim_{r \to +\infty} A^r w^r = [0]$$

soit

$$\lim_{r \to +\infty} \Delta^{sr} u^{sr} = [0]$$

Nous pouvons en déduire que :

$$\lim_{k \to +\infty} \Delta^k u^k = [0]$$

comme la série de matrice de terme général $\Delta^k u^k$ est une série géométrique, $\lim_{k \to +\infty} \Delta^k u^k = [0]$ est une condition nécessaire et suffisante de convergence

La fonction d'efficacité s'écrit alors

$$L(p) = \Lambda[I - \Delta u]^{-1} \sum_{h=1}^{s_2} p^{x_{ih}} q^{y_{1h}} \Gamma_{1h}$$

Soit N la variable aléatoire représentant le nombre d'observations nécessaires pour prendre une décision.

$$N = X + Y$$

X est la variable aléatoire représentant le nombre de pas parallèles à l'axe ox .

Y est la variable aléatoire représentant le nombre de pas parallèles à l'axe oy .

-III- FONCTION CARACTERISTIQUE DE N.

Posons $\Phi(t,p) = E(e^{itN}, p)$

$$\Phi(t,p) = \sum_{P_y \cup P_x} K(x,y)\, p^x\, q^y\, e^{it(x+y)}$$

Soit :

$$\Phi_1(t,p) = \sum_{P_y} K(x,y)\, p^x\, q^y\, e^{it(x+y)}$$

et

$$\Phi_2(t,p) = \sum_{P_x} K(x,y)\, p^x\, q^y\, e^{it(x+y)}$$

$$\Phi(t,p) = \Phi_1(t,p) + \Phi_2(t,p)$$

Posons $n_{ih} = x_{1h} + y_{1h}$

$$\Phi_1(t,p) = \sum_{h=1}^{a_2} (\Lambda I\, \Gamma_{1h}\, p^{x_{1h}} q^{y_{1h}}\, e^{itn_{1h}} + \Lambda\Delta\Gamma_{1h} p^{x_{1h}} q^{y_{1h}}\, u e^{it(n_{1h} + |a_1| + a_2)}$$

$$+ \ldots\ldots + \Lambda\Delta^k\, \Gamma_{1h}\, p^{x_{1h}}\, q^{y_{1h}}\, u^k\, e^{it(n_{1h} + k|a_1| + ka_2)} + \ldots .)$$

Soit

$$\Phi(t,p) = \Lambda(I + \Delta u\, e^{it(|a_1| + a_2)} + \ldots\ldots + \Delta^k u^k\, e^{it\,k(|a_1| + a_2)}) \times$$

$$\times \sum_{h=1}^{a_2} p^{x_{1h}}\, q^{y_{1h}}\, e^{itn_{1h}}\, \Gamma_{1h}$$

Nous démontrons comme précédemment que la série géométrique de matrices de terme général $\Delta^k u^k e^{itk(|a_1| + a_2)}$ est absolument convergente

d'où $$\Phi_1(t,p) = \Lambda\left[I - u\, e^{it(|a_1| + a_2}\right]^{-1} \sum_{h=1}^{a_2} p^{x_{1h}} q^{y_{1h}} e^{itn_{1h}} \Gamma_{1h}$$

Nous retrouvons d'ailleurs L(p) à partir de $\Phi_1(t,p)$

$$L(p) = \Phi_1(0,p)$$

Considérons maintenant les $|a_1|$ premiers points de P_x ; tous les points de P_x se déduisent de ceux-ci par une translation parallèle au vecteur de composantes $(k\, a_2 , k\, |a_1|)$ $k \in \mathbb{N}^*$

x_{2j} et y_{2j} étant les coordonnées du jème des $|a_1|$ premier points de P_x , Γ_{2j} étant la matrice colonne non nulle de "passage" du segment L_k au point de P_x compris entre les segments L_k et L_{k+1} et homologue par translation du point (x_{2j} , y_{2j}) , un calcul identique au précédent permet de trouver l'expression de $\Phi_2(t,p)$

$$\phi_2(t,p) = \Lambda\left[I - ue^{it(|a_1|+ a_2)}\right]^{-1} \sum_{j=1}^{|a_1|} p^{x_{2j}} q^{y_{2j}} e^{itn_{2j}} \Gamma_{2j}$$

d'où la fonction caractéristique de N

$$\phi(t,p) = \Lambda\left[I - \Delta ue^{it(|a_1|+ a_2)}\right]^{-1} \left(\sum_{h=1}^{a_2} p^{x_{1h}} q^{y_{1h}} e^{itn_{1h}} \Gamma_{1h} + \sum_{j=1}^{a_1} p^{x_{2j}} q^{y_{2j}} e^{itn_{2j}} \Gamma_{2j} \right)$$

Si nous posons :

$$R(t,p) = \left[I - \Delta u e^{it(|a_1| + a_2)} \right]$$

$$\Phi(t,p) = \Lambda R^{-1}(t,p) \left(\sum_{h=1}^{a_2} p^{x_{1h}} q^{y_{1h}} e^{itn_{1h}} \Gamma_{1h} + \sum_{j=1}^{|a_1|} p^{x_{2j}} q^{y_{2j}} e^{itp_{2j}} \Gamma_{2j} \right)$$

-IV- NOMBRE MOYEN D'OBSERVATIONS

$$E(N,p) = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial \Phi(t,p)}{\partial t} \right]_{t=0}$$

$$\text{Soit } E(N,p) = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial \Phi_1(t,p)}{\partial t} \right]_{t=0} + \frac{1}{i} \left[\frac{\partial \Phi_2(t,p)}{\partial t} \right]_{t=0}$$

$$\frac{\partial \Phi_1(t,p)}{\partial t} = \Lambda R^{-1}(t,p) i(|a_1|+a_2) \Delta u e^{i(|a_1|+a_2)t} R^{-1}(t,p) \sum_{h=1}^{a_2} p^{x_{1h}} q^{y_{1h}} e^{itn_{1h}} \Gamma_{1h}$$

$$+ \Lambda R^{-1}(t,p) \sum_{h=1}^{a_2} in_{1h} p^{x_{1h}} q^{y_{1h}} e^{itn_{1h}} \Gamma_{1h}$$

$$\frac{\partial \Phi_2(t,p)}{\partial t} = \Lambda R^{-1}(t,p) i(|a_1|+a_2) \Delta u e^{it(|a_1|+a_2)} R^{-1}(t,p) \sum_{j=1}^{|a_1|} p^{x_{2j}} q^{y_{2j}} e^{itn_{2j}} \Gamma_{2j}$$

$$+ \Lambda R^{-1}(t,p) \sum_{j=1}^{|a_1|} in_{2j} p^{x_{2j}} q^{y_{2j}} e^{itn_{2j}} \Gamma_{2j}$$

$$\frac{1}{i}\left[\frac{\partial \Phi_1(t,p)}{\partial t}\right]_{t=0} = (|a_1|+a_2)u\ \Lambda R^{-1}(0,p)\ \Delta R^{-1}(0,p) \sum_{h=1}^{a_2} p^{x_{1h}}\ q^{y_{1h}}\ \Gamma_{1h}$$

$$+\ \Lambda R^{-1}(0,p) \sum_{h=1}^{a_2} n_{1h}\ p^{x_{1h}}\ q^{y_{1h}}\ \Gamma_{1h}$$

$$\frac{1}{i}\left[\frac{\partial \Phi_2(t,p)}{\partial t}\right]_{t=0} = (|a_1|+a_2)u\ \Lambda R^{-1}(0,p)\ \Delta R^{-1}(0,p) \sum_{j=1}^{|a_1|} p^{x_{2j}}\ q^{y_{2j}}\ \Gamma_{2j})$$

$$+\ \Lambda R^{-1}(0,p) \sum_{j=1}^{|a_1|} n_{2j}\ p^{x_{2j}}\ q^{y_{2j}}\ \Gamma_{2j}$$

d'où

$$E(N,p) = (|a_1|+a_2)u\Lambda\ R^{-1}(0,p)\ \Delta R^{-1}\ (0,p)\ \Big(\sum_{h=1}^{a_2} p^{x_{1h}}\ q^{y_{1h}}\ \Gamma_{1h} + \sum_{j=1}^{|a_1|} p^{x_{2j}}\ q^{y_{2j}}\ \Gamma_{2j}$$

$$+\ \Lambda R^{-1}(0,p)\ \Big(\sum_{h=1}^{a_2} n_{1h}\ p^{x_{1h}}\ q^{y_{1h}}\ \Gamma_{1h} + \sum_{j=1}^{|a_1|} n_{2j} p^{x_{2j}} q^{y_{2j}} \Gamma_{2j}\Big)$$

E CARACTERISTIQUES D'UN TEST COMPOSE DE DEUX TESTS BINOMIAUX

-I- PRELIMINAIRES

ARMITAGE [2] présente une solution séquentielle au problème suivant :

Soit une variable aléatoire normale de moyenne μ et de variance σ^2 inconnue.

Nous voulons éprouver l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ contre l'hypothèse $H_+ : \mu = \mu_0 + D\sigma$ $(D > 0)$ au moyen d'un test de probabilités d'erreur de première et deuxième espèce α et β.

Notons + les observations supérieures à μ_0 et - les observations inférieures à μ_0 .

Sous l'hypothèse H_0 , la probabilité d'obtenir une observation - est $\frac{1}{2}$

Sous l'hypothèse H_+ , la probabilité d'obtenir une observation

$$- \text{ est } p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_D^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (p_1 < \frac{1}{2})$$

Dès lors si les observations sont faites séquentiellement, nous pouvons nous ramener à un test séquentiel binomial du rapport des probabilités pour les hypothèses H_0 et H_+ avec les probabilités d'erreurs de première et deuxième espèce β et α .

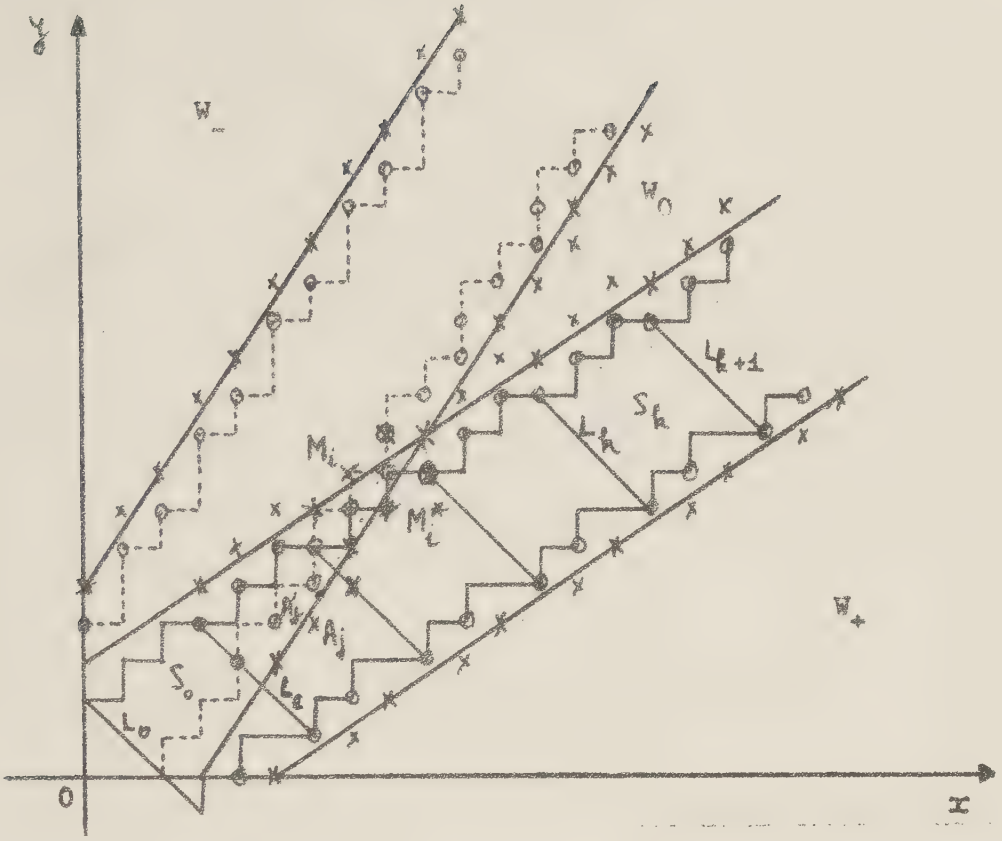
Ce procédé peut être étendu à un test bilatéral. Nous appelons T_+ le test séquentiel binomial du rapport des probabilités correspondant au test de l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ contre l'hypothèse $H_+ : \mu = \mu_0 + D\sigma$

Nous appelons T_- le test séquentiel binomial du rapport des probabilités correspondant au test de l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ contre l'hypothèse $H_- : \mu = \mu_0 - D\sigma$. $(D > 0)$

Pour chacun des tests T_+ et T_- α est remplacé par $\frac{\alpha}{2}$. Une décision est prise quand le point M est sorti successivement (ou éventuellement simultanément) de chacune des deux zones d'indifférence.

Nous nous trouvons dans un des trois cas suivants :

	Test T_+	Test T_-
(1)	H_0 est acceptée	H_0 est acceptée
(2)	H_+ est acceptée	H_0 est acceptée
(3)	H_0 est acceptée	H_- est acceptée



W_+ zone d'acceptation de H_+

W_0 zone d'acceptation de H_0

W_- zone d'acceptation de H_-

o points de la frontière active

x points de la frontière passive

FIGURE II - 3

Ce qui nous conduit, pour le test $T = T_+ \cap T_-$ à prendre les décisions suivantes :

(1) H_0 est acceptée

(2) H_+ est acceptée

(3) H_- est acceptée

Les zones d'indifférence, symétriques par rapport à la première bissectrice des axes sont définies par : (voir figure II-3).

$$T_+ \begin{cases} a_1 x + a_2 y = d_0 \\ a_1 x + a_2 y = d_1 \end{cases}$$

$$T_- \begin{cases} a_2 x + a_1 y = d_0 \\ a_2 x + a_1 y = d_1 \end{cases}$$

-II- FONCTION D'EFFICACITE

En utilisant les résultats précédents, les probabilités d'acceptation des différentes hypothèses sont

$$P_+(p) = \Lambda_+ \left[I - \Delta_+ u \right]^{-1} \sum_{j=1}^{|a_1|} p^{x_{2j}} q^{y_{2j}} \Gamma_{+2j}$$

avec $u = p^{a_2} q^{|a_1|}$

En se servant de la symétrie des zones d'indécision, nous obtenons :

$$P_-(p) = \Lambda_+ \left[I - \Delta_+ v \right]^{-1} \sum_{j=1}^{|a_1|} p^{y_{2j}} q^{y_{2j}} \Gamma_{+2j}$$

$$\text{avec } v = p^{|a_1|}\, q^{a_2}$$

Nous remarquons que :

$$P_+(p) = P_-(1-p)$$

La fonction d'efficacité L(p) est :

$$L(p) = 1 - P_+(p) - P_-(1-p)$$

-III- FONCTION CARACTERISTIQUE DE N

Soit $\mathcal{M}$, l'ensemble des points $M_i(x_i, y_i)$ de la frontière passive supérieure de T_+ , tels que :

$$\frac{d_1}{a_2} \leq x_i \leq \frac{d_1}{a_2 - |a_1|}$$

Soit $\mathcal{A}_i$ l'ensemble des points $A_j(\xi_j, \eta_j)$ de la frontière passive inférieure de T_- tels que :

$$\frac{d_1}{a_1} \leq \xi_j \leq x_i$$

Soit $A'_j(\xi_j - 1, \eta_j)$ le point de la frontière active de T_- correspondant à $A_j(\xi_j, \eta_j)$.

Soit H_j le nombre de chemins allant de O à A'_j entièrement situés dans l'intersection des zones d'indifférence de T_+ et T_- .

Soit K_{ij} le nombre de chemins allant de A_j à M_i entièrement situés dans la zone d'indifférence de T_+ .

$$\Pr\ [\text{accepter } H_0 \text{ en } M_i] = p^{x_i} q^{y_i} \sum_{A_j \in \mathcal{A}_i} H_j K_{ij} = p^{x_i} q^{y_i} K_i$$

en posant $K_i = \sum_{A_j \in \mathcal{A}_i} H_j K_{ij}$

Soit M^* le point symétrique de M_i par rapport à la première bissectrice des axes.

$$\Pr\ [\text{accepter } H_0 \text{ en } M_i^*] = p^{y_i} q^{x_i} K_i$$

Posons $R_u(t,p) = [I - \Delta_+^{\dagger} u e^{i(|a_1|+a_2)t}]$

Nous écrivons la fonction caractéristique $\Phi(t,p) = E(e^{itN})$ sous la forme d'une somme de plusieurs expressions correspondant à la contribution de chaque frontière passive.

Pour la frontière passive inférieure de T_+ nous avons :

$$\Phi_1(t,p) = \Lambda_+ R_u^{-1}(t,p) \sum_{j=1}^{|a_1|} p^{x_{2j}} e^{itn_{2j}} \Gamma_{+2j}$$

avec $n_{2j} = x_{2j} + y_{2j}$

Pour la partie de la frontière passive supérieure de T_+ dont les points appartiennent à $\mathcal{M}$, nous avons :

$$\Phi_2(t,p) = \sum_{M_i \in \mathcal{M}} p^{x_i} q^{y_i} K_i e^{itn_i}$$

avec $n_i = x_i + y_i$

Pour la partie de la frontière passive supérieure de T_+ dont les points n'appartiennent pas à $\mathcal{M}$, nous avons :

$$\Phi_3(t,p) = \Lambda_+ u^{\ell} \Delta_+^{\ell} R_u^{-1}(t,p) \sum_{h=1}^{a_2} p^{x_{1h}} q^{y_{1h}} e^{itn_{1h}} \Gamma_{+1h}$$

avec $n_{1n} = x_{il} + y_{1h}$

Le coefficient ℓ représente le nombre de tranches superposables comprises entre le point $\left(\frac{d_1}{a_2+a_1} , \frac{d_1}{a_2+a_1} \right)$ intersection des droites $a_1x + a_2y = d_1$ et $a_1y + a_2x = d_1$ et le point O .

En tenant compte de la symétrie par rapport à la première bissectrice des axes (voir la figure II-3), nous avons pour les différentes parties de la frontière passive du test T_- :

$$\Phi^*_1(t,p) = \Phi_1(t,1-p)$$
$$\Phi^*_2(t,p) = \Phi_2(t,1-p)$$
$$\Phi^*_3(t,p) = \Phi_3(t,1-p)$$

D'où la fonction caractéristique :

$$\Phi(t) = \Phi_1(t,p)+\Phi_1(t,1-p)+\Phi_2(t,p)+\Phi_2(t,1-p)+\Phi_3(t,p)+\Phi_3(t,1-p)$$

-IV- NOMBRE MOYEN D'OBSERVATIONS

Posons $E_1(N,p) = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial \Phi_1(t,p)}{\partial t} \right]_{t=0}$

$$E_1(N,p) = (|a_1|+a_2)u \; \Lambda_+ R_u^{-1}(O,p) \; \Delta_+ R_u^{-1}(O,p) \sum_{j=1}^{|a_1|} p^{x_{2j}} q^{y_{2j}} \Gamma_{2j}$$

$$+ \; \Lambda_+ \Delta R_u^{-1}(O,p) \sum_{j=1}^{|a_1|} n_{2j} \, p^{x_{2j}} \, q^{y_{2j}} \, \Gamma_{+2j}$$

Posons $E_2(N,p) = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial \Phi_2(t,p)}{\partial t} \right]_{t=0}$

$$E_2(N,p) = \sum_{M_i \in \mathcal{M}_{(}} n_i \, p^{x_i} \, q^{y_i} \, K_i$$

Posons $E_3(N,p) = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial \Phi_3(t,p)}{\partial t} \right]_{t=0}$

$$E_3(N,p) = (|a_1|+a_2) \, \Lambda_+^{\ell} u^{\ell+1} \Delta_+^{\ell} R_u^{-1}(0,p) \, \Delta_+ R_u^{-1}(0,p) \sum_{h=1}^{a_2} p^{x_1 h} \, q^{y_1 h} \, \Gamma_{+1h}$$

$$+ \Lambda_+ u^{\ell} \, \Delta_+^{\ell} R_u^{-1}(0,p) \sum_{h=1}^{a_2} n_{1h} \, p^{x_1 h} \, q^{y_1 h} \, \Gamma_{+1h}$$

En tenant compte de la symétrie par rapport à la première bissectrice des axes nous pouvons écrire :

$$E_1^*(N,p) = E_1(N,1-p)$$

$$E_2^*(N,p) = E_2(N,1-p)$$

$$E_3^*(N,p) = E_3(N,1-p)$$

si $E_1^*(N,p)$, $E^*_2(N,p)$ et $E_3^*(N,p)$ sont les contributions au nombre moyen d'observations des trois parties de la frontière passive de T_- correspondant à celles de T_+ .

D'où le nombre moyen d'observations :

$$E(N,p) = E_1(N,p)+E_1(N,1-p)+E_2(N,p)+E_2(N,1-p)+E_3(N,p)+E_3(N,1-p)$$

Nous constatons que, de même que $\Phi(t,p) = \Phi(t,1-p)$

$$E(N,p) = E(N,1-p)$$

SOBEL et WALD [41] donnent un test analogue à celui d'ARMITAGE.

La méthode exposée ci-dessus, est parfaitement applicable à l'analogue binomial du test de SOBEL et WALD, mais les propriétés de symétrie trouvées dans le test d'ARMITAGE n'existent plus.

F CARACTERISTIQUES D'UN TEST COMPOSE DE TROIS TESTS BINOMIAUX

-I- PRELIMINAIRES

ARMITAGE [3] a proposé un test séquentiel composé de trois tests séquentiels binomiaux du rapport de probabilités simultanés pour éprouver les trois hypothèses suivantes :

$$H_- \quad p = p_-$$

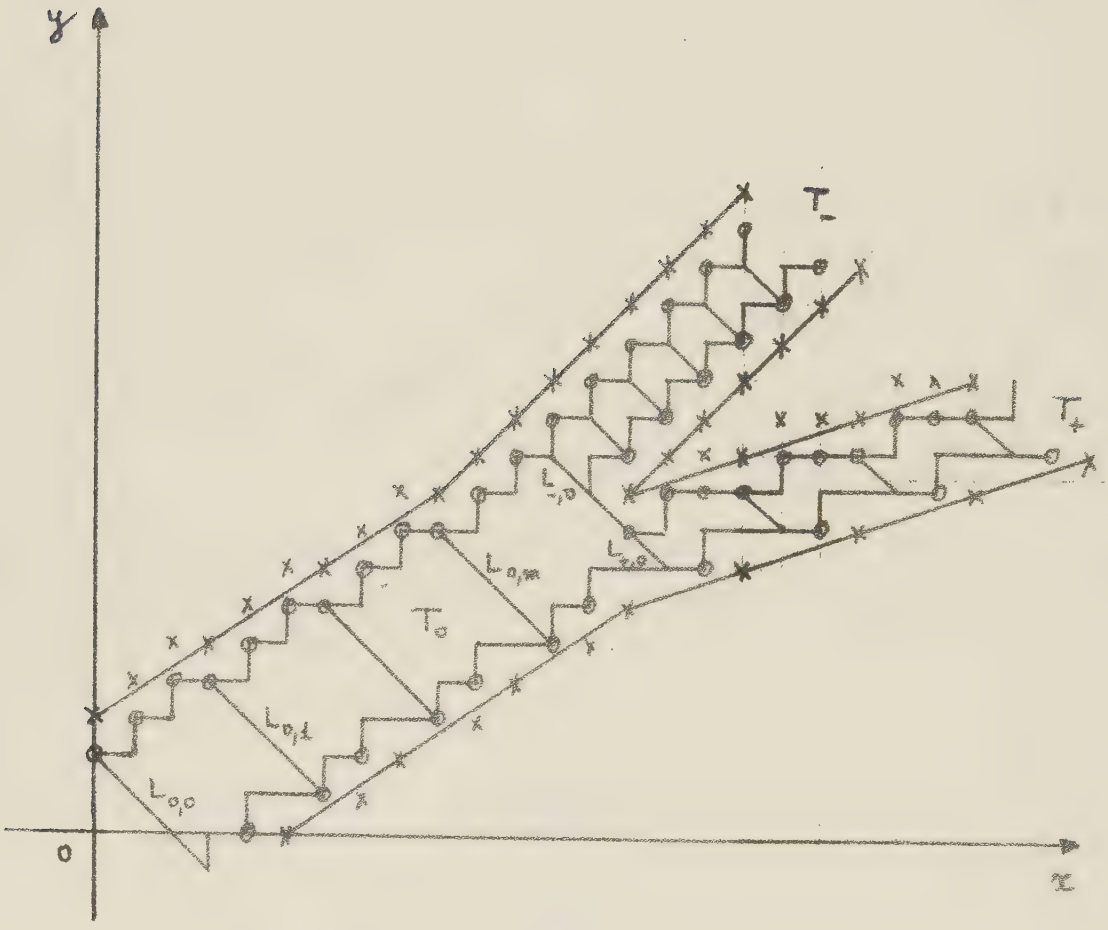
$$H_0 \quad p = p_0$$

$$H_+ \quad p = p_+$$

Les zones d'indifférence sont définies par

$$\begin{cases} a_{s1}\, x + a_{s2} y = d_{s0} \\ a_{s1}\, x + a_{s2} y = d_{s1} \end{cases}$$

avec $s = +, 0, -$



° Points de la frontière active

× Points de la frontière passive

FIGURE II - 4

-II- PROBABILITES D'ACCEPTATION DES HYPOTHESES

L'acceptation des hypothèses H_+ et H_- correspond à l'arrivée au cours de la marche aléatoire du point M(n) sur les frontières passives extérieures.

L'acceptation de l'hypothèse H_0 correspond à l'arrivée au cours de la marche aléatoire du point M(n) sur la frontière passive intérieure (voir figure II-4).

Si nous utilisons la méthode matricielle précédente, nous obtenons les probabilités d'acceptation des trois hypothèses

$$P_+(p) = \Lambda_0 \Big(\sum_{j=1}^{m-1} \Delta_0^j \, u_0^j \Big) \Big(\sum_{h=1}^{a_{0,2}} p^{x_{0,1h}} \, q^{y_{0,1h}} \, \Gamma_{0,1h} \Big)$$

$$+\Lambda_0 \Delta_0^m \, u_0^m \Big(\sum_{h=1}^{c_1} p^{x_h} \, q^{y_h} \Gamma_h \Big) + \Lambda_0 \Delta_0^m \, D_{(+)} \big[I - \Delta_+ u_+ \big]^{-1} \Big(\sum_{h=1}^{a_{+,2}} p^{x_{+,1h}} q^{y_{+,1h}} \, \Gamma_{+,1h} \Big)$$

$$P_-(p) = \Lambda_0 \Big(\sum_{j=1}^{m-1} \Delta_0^j \, u_0^j \Big) \sum_{j=1}^{|a_{0,1}|} p^{x_{0,2j}} \, q^{y_{0,2j}} \, \Gamma_{0,2j} \Big) + \Lambda_0 \Delta_0^m u_0^m \Big(\sum_{j=1}^{c_2} p^{x_j} \, q^{y_j} \, \Gamma_j \Big)$$

$$+ \Lambda_0 \Delta_0 \, D_{(-)} \big[I - \Delta_- \, u_- \big]^{-1} \Big(\sum_{j=1}^{|a_{-,1}|} p^{x_{-,2j}} \, q^{y_{-,2j}} \, \Gamma_{-,2j} \Big)$$

$$P_0(p) = 1 - P_+(p) - P_-(p)$$

Λ_0 est la matrice de "passage" du point 0 au segment $L_{0,0}$.

$s = +,0,-$

Δ_s est la matrice de "passage" d'un segment $L_{s,k}$ à un segment $L_{s,k+1}$.

$u_s = p^{a_{s,2}} \, q^{|a_{s,1}|}$

Les points $(x_{s,1h}, y_{s,1h})$ et $(x_{s,2j}, y_{s,2j})$

$h = 1,\ldots a_{2,s}$

$j = 1,\ldots |a_{1,s}|$

sont les premiers points de frontières passives des tests T_s
Ces points sont donc situés après les segments $L_{s,0}$.

$\Gamma_{s,1h}$ (respectivement $\Gamma_{s,2j}$) est la matrice colonne de "passage" du segment $L_{s,k}$ en un point obtenu par translation parallèle au vecteur de composantes $(a_{s,2}, |a_{s,1}|)$ du point de coordonnées $(x_{s,1h}, y_{s,1h})$ (respectivement $(x_{s,2j}, y_{s,2j})$) .

D est la matrice de passage des points du segment $L_{0,m}$ (dernier segment considéré de la zone d'indifférence du test T_0) aux points des segments $L_{+,0}$ et $L_{-,0}$ (premiers segments considérés des zones d'indifférence des tests T_+ et T_-) .

Soit $t_s (s = +, 0, -)$ l'ordre des matrices carrées Δ_s

D est une matrice rectangulaire $(t_0, t_+ + t_-)$

$D_{(+)}$ est une matrice (t_0, t_+) ayant comme éléments les éléments des t_+ premières colonnes de D.
$D_{(-)}$ est une matrice (t_0, t_-) ayant comme éléments les éléments des t_- dernières colonnes de D.

L'existence des paramètres c_1 et c_2 provient du fait que certains points de la frontière passive de T_0 dans la tranche S_{0m}, peuvent ne pas être atteints, les frontières effectives du test $T = T_+ \cap T_0 \cap T_-$ devenant à cet endroit celles de T_+ ou T_- .

c_1(respectivement c_2) est égal au nombre de points de la frontière passive inférieure (respectivement supérieure) de la tranche de la zone d'indécision du test T comprise entre les segments $L_{0,m}$ d'une part, et $L_{+,0}$ et $L_{-,0}$ d'autre part.

Γ_h(respectivement Γ_h^*) est la matrice de passage du segment $L_{0,m}$ au hième des c_1(respectivement c_2) points définis plus haut .

-III- FONCTION CARACTERISTIQUE DE N ET NOMBRE MOYEN D'OBSERVATIONS

La fonction caractéristique $\Phi(t) = E(e^{itN})$ s'écrit sous la forme d'une somme de plusieurs expressions indiquant la contribution de chaque frontière

$$\Phi_+(t,p)=\Lambda_0\Big(\sum_{j=0}^{m-1}\Delta_0^j u_0^j e^{i(|a_{0,1}|+a_{0,2})jt}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{|a_{0,1}|} p^{x_{0,2j}} q^{y_{0,2j}} e^{itn_{0,2j}}\Gamma_{0,2j}\Big)$$

$$+\Lambda_0\Delta_0^m u_0^m e^{i(|a_{0,1}|+a_{0,2})mt}\Big(\sum_{h=1}^{c_1} p^{x_h} q^{y_h} e^{in_h t}\Gamma_h\Big)$$

$$+\Lambda_0\Delta_0^m D_{(+)}\Big[I-\Delta_+ u_+ e^{i(|a_{+,1}|+a_{+,2})t}\Big]^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{|a_{+,1}|} p^{x_{+,2j}} q^{y_{+,2j}} e^{itn_{+,2j}}\Gamma_{+2j}\Big)$$

$$\Phi_-(t,p)=\Lambda_0\Big(\sum_{j=0}^{m-1}\Delta_0^j u_0^j e^{i(|a_{0,1}|+a_{0,2})jt}\Big)\Big(\sum_{h=1}^{a_{0,2}} p^{x_{0,1h}} q^{y_{0,1h}} e^{itn_{0,1h}}\Gamma_{0,1h}\Big)$$

$$+\Lambda_0\Delta_0^m u_0^m e^{i(|a_{0,1}|+a_{0,2})mt}\Big(\sum_{h=1}^{c_2} p^{x_h} q^{y_h}\Gamma_h^*\Big)$$

$$+\Lambda_0\Delta_0^m D_{(-)}\Big[I-\Delta_- u_- e^{i(|a_{-,1}|+a_{-,2})t}\Big]^{-1}\Big(\sum_{h=1}^{a_{-,2}} p^{x_{-,1h}} q^{y_{-,1h}} e^{itn_{-,1h}}\Gamma_{-,1h}\Big)$$

$$\Phi_0(t,p) = \Lambda_0 \Delta_0^m D_{(+)} \left[I - \Delta_+ u_+ e^{i(|a_{+,1}| + a_{+,2})t} \right]^{-1} \left(\sum_{j=1}^{|a_{+,1}|} p^{x_{+,2j}} q^{y_{+,2j}} e^{itn_{+,2j}} \Gamma_{+,2j} \right)$$

$$+ \Lambda_0 \Delta_0^m D_{(-)} \left[I - \Delta_- u_- e^{i(|a_{-,1}| + a_{-,2})t} \right] - 1 \left(\sum_{h=1}^{a_{-,2}} p^{x_{-,1h}} q^{y_{-,1h}} e^{itn_{-,1h}} \Gamma_{-,1h} \right)$$

$$\Phi(t,p) = \Phi_+(t,p) + \Phi_-(t,p) + \Phi_0(t,p)$$

Posons $E_s(N,p) = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial \Phi_s(t,p)}{\partial t} \right]_{t=0}$

avec $s = +,0,-$

le nombre moyen d'observations s'écrit :

$$E(N,p) = E_+(N,p) + E_-(N,p) + E_0(N,p)$$

Cette méthode de calcul peut s'appliquer au cas de tests séquentiels composés de plus de trois tests séquentiels binomiaux simultanés. Nous arriverions à des expressions analogues mais plus complexes.

G. CAS DES VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

Nous avons exposé au chapitre I la méthode utilisée par WALD pour trouver des expressions approchées des caractéristiques du test séquentiel aussi bien dans le cas discret que dans le cas continu.

Plusieurs autres auteurs ont étudié cette question et donné d'autres approximations, plus particulièrement dans le cas de la variable aléatoire normale . Nous pouvons citer en particulier : BARNACLOUGH et PAGE [5] , KEMP [22] [23], KEMPERMAN [24], PAGE [34] [35], SAMUELSON [38] , TALLIS et VAGHOLKAR [42].

La plupart de ces auteurs obtiennent leurs résultats en résolvant de façon approchées les équations intégrales suivantes :

$$L_\theta(z) = \int_{-\infty}^{b} g_\theta(x-z)dx + \int_{b}^{a} L_\theta(x)\, g_\theta\,(x-z)\, dx$$

$$E_\theta(N,z) = 1 + \int_{b}^{a} E_\theta(N,x)\, g_\theta(x-z)\, dx$$

où g_θ est la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z = \text{Log}\ \dfrac{f(X,\theta_1)}{f(X,\theta_0)}$

où $a = \text{Log}\ A$ et $b = \text{Log}\ B$

où $L_\theta(z)$ (respectivement $E_\theta(N,z)$) est la fonction d'efficacité (respectivement le nombre moyen d'observations) pour la valeur θ du paramètre et pour z tel que $b < z < a$.

Pour les tests séquentiels sur le paramètre de la loi d'une variable aléatoire exponentielle, DIVATIA [11] donne des valeurs approchées des caractéristiques. RAGHAVACHARI [37] et SCHORR [40] donnent des expressions exactes dans ce cas, que nous étudierons dans le chapitre IV comme application du test séquentiel d'hypothèses sur le paramètre d'un processus de Poisson.

C H A P I T R E -III-

LE TEST SEQUENTIEL D'HYPOTHESES SUR LES PROBABILITES DE TRANSITION D'UNE CHAINE DE MARKOV D'ORDRE UN

Le test séquentiel du rapport de probabilités est essentiellement étudié quand les épreuves constituant l'échantillon sont indépendantes.

Cependant WALD [43] remarque déjà que ce test peut être utilisé dans le cas d'épreuves dépendantes et que certains résultats qu'il trouve pour des épreuves indépendantes restent valables si l'on arrive à démontrer que le test conduit à une décision avec une probabilité 1.

SCHMITZ [39] prouve que le test séquentiel du rapport des probabilités appliqué aux chaînes de Markov homogènes finies perd sa propriété d'optimalité. Cet auteur montre sur un exemple que le test permet cependant de réaliser en moyenne une économie très importante d'observations par rapport à certains tests à taille d'échantillon fixée (ANDERSON et GOODMAN [1] , BILLINGSLEY [8]). Les caractéristiques du test données par SCHMITZ sont des approximations.

Dans ce chapitre, nous donnons les caractéristiques exactes du test séquentiel du rapport des probabilités appliqué aux chaînes de Markov homogènes et non homogènes finies et à certaines chaînes de Markov dénombrables.

A CHAINES DE MARKOV HOMOGENES FINIES

-I- PREMIER TYPE D'ECHANTILLONNAGE

-I- 1 PRELIMINAIRES

Nous appelons échantillon d'une chaîne de Markov une suite de transitions successives observées sur la chaîne de Markov.

Nous étudions ici le type d'échantillonnage suivant :

Nous observons les transitions successives d'un échantillon de la chaîne de Markov considérée jusqu'à la prise d'une décision . Ce premier type d'échantillonnage est l'analogue séquentiel de celui qui est considéré par BARTLETT [6] .

Notons $P = [p_{ij}]$ $i = 1,2,\ldots\ldots,m$ $\quad$ $j = 1,2,\ldots\ldots,m$

la matrice de transition de la chaîne de Markov homogène finie.

Notons $\pi(0) = [p_1(0) , p_2(0) , \ldots\ldots , p_m(0)]$ le vecteur probabilité de départ.

Les hypothèses à éprouver sont :

$$H_0 \begin{cases} \pi(0) \\ p = {}^0p = [{}^0p_{ij}] \end{cases}$$

$$H_1 \begin{cases} \pi(0) \\ p = {}^1p = [{}^1p_{ij}] \end{cases}$$

Nous voyons que le vecteur probabilité de départ est le même sous les deux hypothèses H_0 et H_1 . S'il avait des valeurs distinctes sous H_0 et H_1 les résultats seraient très voisins de ceux obtenus dans le premier cas. De toute façon, cette éventualité est étudiée pour un autre type d'échantillonnage.

La probabilité d'avoir un échantillon Markovien donné de taille F s'écrit :

$$p_{i_0}(0) \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{m} p_{ij}^{n_{ij}}$$

avec :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} = F \\ \sum_{i=1}^{m} (n_{ij} - n_{ji}) = \delta_{ji_0} - \delta_{ji_F} \end{cases}$$

(symbole de KRONECKER)

i_0 est l'état initial de l'échantillon

i_F est l'état final de l'échantillon

n_{ij} est le nombre de fois où la transition (i,j) est rencontrée dans l'échantillon

$n_{ij} \in \mathbb{N} \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,m \quad$ et $\quad j = 1,2,\ldots,m$

$$\text{Posons } z_{ij} = \log \frac{{}^{1}p_{ij}}{{}^{0}p_{ij}}$$

avec $z_{ij} = 0$ pour ${}^{0}p_{ij} = {}^{1}p_{ij} = 0$

$$Z_n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} z_{ij}$$

La règle de décision du test est :

$$\begin{cases} \text{tant que } \log B < Z_n < \log A \text{ une épreuve supplémentaire est nécessaire} \\ \text{dès que } Z_n \leq \log B \quad \text{l'hypothèse } H_0 \text{ est acceptée} \\ \text{dès que } Z_n \geq \log A \quad \text{l'hypothèse } H_1 \text{ est acceptée} \end{cases}$$

Si nous avons les relations :

$z_{ij} = a_{ij} g \quad \forall i = 1,2,\ldots,m \quad \text{et} \quad \forall j = 1,2,\ldots,m$

avec $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ et $g \in \mathbb{R}^*$ (Condition C)

La règle de décision peut s'écrire :

$$\begin{cases} \text{tant que } d_0 < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, n_{ij} < d_1 & \text{une épteuve supplémentaire est nécessaire} \\ \text{dès que } \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, n_{ij} \leq d_0 & \text{l'Hypothèse } H_0 \text{ est acceptée} \\ \text{dès que } \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, n_{ij} \geq d_1 & \text{l'hypothèse } H_1 \text{ est acceptée} \end{cases}$$

Nous allons considérer le déroulement du test comme une marche aléatoire d'un point M dans un espace euclidien à m^2 dimensions.

A chaque transition (i,j), le point se déplace d'un pas unité parallèlement à l'axe OX_{ij} correspondant. Cette marche aléatoire est proche de la marche aléatoire MA 1 liée au test séquentiel du rapport de probabilité d'un échantillon multinomial . Nous pouvons démontrer par la méthode utilisée au chapitre II que cette marche aléatoire est quasi-périodique.

Il y a cependant une différence essentielle :

Sachant qu'au pas (n-1) l'état de la chaîne de Markov dans lequel se trouve l'échantillon est i, le pas suivant ne pourra être parallèle qu'à un des axes OX_{ij} i fixé, j=1,2,....,m de l'espace à m^2 dimensions, alors que dans le cas de la marche aléatoire correspondant au test d'un échantillon multinomial à m^2 dimensions, le pas suivant peut être parallèle à n'importe lequel des m^2 axes.

D'ailleurs, l'égalité $\sum_{i=1}^{m} (n_{ij} - n_{ji}) = \delta_{ji_0} - \delta_{ji_f}$ exprime le fait que, excepté pour le début et la fin, il y a autant d'arrivées dans un état que de départs de celui-ci, d'où l'impossibilité de certains cheminements.

Soit $\{\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_s\}$ l'ensemble des entiers $d \in]d_0, d_1[$ tels que le système

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \; x_{ij} = d \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 0 \end{cases}$$

admette une solution entière.

Nous appelons "point" $M_h(0, i_0)$ la donnée d'un point dont les coordonnées x_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots\ldots,m)$ sont solution entière du système

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \; x_{ij} = \delta_h \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 0 \end{cases}$$

et de l'état initial i_0 de l'échantillon de la chaîne de Markov à l'instant 0 de départ de la marche aléatoire.

Nous appelons de même $M_\ell(f, i_f)$ un "point" dont les coordonnées y_{ij} sont solution entière du système :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \; y_{ij} = \delta_\ell \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} y_{ij} = f \end{cases}$$

et tel qu'à l'instant f, l'état dans lequel est l'échantillon de la chaîne de Markov est i_f.

Posons $y_{ij} = x_{ij} + n_{ij}$

Si nous pouvons passer, au cours de la marche aléatoire, du point $M_h(0,i_0)$ au point $M_\ell(f,i_f)$, l'ensemble des n_{ij} est solution entière du système

$$\begin{cases} n_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad \text{et} \qquad j = 1,2,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, n_{ij} = \delta_\ell - \delta_h \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} = f \\ \sum_{i=1}^{m} (n_{ij} - n_{ji}) = \delta_{ji_0} - \delta_{ji_f} \end{cases}$$

la dernière égalité de ce système implique que, si l'on peut passer du point $M_h(0,i_0)$ au point $M_\ell(f,i_f)$ on ne peut passer du point $M_h(0,i'_0)$ au point $M_\ell(f,i'_f)$ que si $i_0 = i_f$ et $i'_0 = i'_f$

-I- 2 CARACTERE FINI DU TEST

Nous appelons sous chaîne irréductible de la chaîne de Markov considérée, toute partie de l'ensemble des états dont les éléments ne communiquent qu'entre eux.

Théorème III 1

Hypothèses : Les hypothèses simples H_0 et H_1 sont distinctes pour toute sous-chaîne irréductible de la chaîne de Markov considérée.

$P \in \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des matrices de transition telles que la probabilité de sortir de la zone d'indécision est non nulle quels que soient le point de départ de la marche aléatoire et l'état initial de la chaîne de Markov.

Conclusion :

La probabilité que le test permette de prendre une décision est 1.

Démonstration :

Soit $M_h(0,i_0)^{S)}(P)$ la probabilité de demeurer dans la zone d'indécision sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0,i_0)$ (respectivement $M_\ell(f,i_f)$).

Soit $M_h(0,i_0)^{\omega(P)}\ M_\ell(f,i_f)$ la probabilité d'atteindre le point $M_\ell(f,i_f)$ sans sortir de la zone d'indécision, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0,i_0)$

La marche aléatoire étant quasi-périodique et la chaîne de Markov considérée d'ordre un, il existe un entier positif f tel que nous pouvons écrire :

$$M_h(0,i_0)^{S(P)} = \sum_{M_\ell(f,i_f) \in DM_h(0,i_0)} M_h(0,i_0)^{\omega(P)}\ M_\ell(f,i_f) \cdot M_\ell(f,i_f)^{S(P)}$$

$DM_h(0,i_0)$ est l'ensemble des points pouvant être atteints en f pas, sans sortir de la zone d'indécision, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0,i_0)$

Or, pour les mêmes raisons qui entraînent l'existence de f,

$$M_\ell(f,i_f)^{S(P)} = M_\ell(0,i_f)^{S(P)}$$

d'où

$$M_h(0,i_0)^{S(P)} = \sum_{M_\ell(f,i_f) \in DM_h(0,i_0)} M_h(0,i_0)^{\omega(P)}\ M_\ell(f,i_f) \cdot M_\ell(0,i_f)^{S(P)}$$

Soit S(P) la matrice (sm × 1) d'éléments $S(P)_{M_h(0,i_0)}$

$h = 1,2,\ldots\ldots,s$

$i_0 = 1,2,\ldots\ldots,m$

Soit $\Omega(P)$ la matrice (sm × sm) d'éléments $\omega(P)_{M_h(0,i_0)\ M_\ell(f,i_f)}$.

Nous pouvons écrire :

$$S(P) = \Omega(P)\ S(P)$$

soit

$$[I - \Omega(P)]\ S(P) = [CO]$$

Comme les hypothèses H_0 et H_1 sont distinctes pour toute sous-chaîne irréductible de la chaîne de Markov considérée et comme $P \in \mathcal{P}$, la matrice $\Omega(P)$ est une matrice à éléments non négatifs, telle qu'aucun élément de sa diagonale n'est égal à l'unité et telle que la somme des éléments d'au moins une des lignes de toute sous-matrice carrée (batie sur la diagonale principale) est strictement inférieure à l'unité.

D'après le théorème de PERRON-FROBENIUS (voir chapitre II p.32) , les valeurs propres de $\Omega(P)$ sont strictement inférieures à l'unité ;

$[I - \Omega(P)]$ est donc régulière

d'où $S(P) = [CO]$

La probabilité de ne pas prendre de décision, quel que soit le point de départ est nulle. Le théorème est donc démontré.

-I- 3 FONCTION D'EFFICACITE

Soit $L(P)_{M_h(0,i_0)}$ la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0,i_0)$

Soit $L(P)_{M_h(0,i_0)}$ la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 en moins de (f+1) pas, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0,i_0)$

$$L(P)_{M_h(0,i_0)} = \gamma(P)_{M_h(0,i_0)} + \sum_{M_\ell(f,i_f) \in DM_h(0,i_0)} \omega(P)_{M_h(0,i_0) M_\ell(f,i_f)} \; L(P)_{M_\ell(f,i_f)}$$

or $$L(P)_{M_\ell(f,i_f)} = L(P)_{M_\ell(0,i_f)}$$

d'où

$$L(P)_{M_h(0,i_0)} = \gamma(P)_{M_h(0,i_0)} + \sum_{M_\ell(f,i_f) \in DM_h(0,i_0)} \omega(P)_{M_h(0,i_0) M_\ell(f,i_f)} \; L(P)_{M_\ell(0,i_f)}$$

Soit L(P) la matrice (sm × 1) d'éléments $L(P)_{M_h(0,i_0)}$

Soit $\Gamma(P)$ la matrice (sm × 1) d'éléments $\gamma(P)_{M_h(0,i_0)}$

L'égalité précédente s'écrit matriciellement

$$L(P) = \Gamma(P) + \Omega(P) \; L(P)$$

Soit

$$[I - \Omega(P)] \; L(P) = \Gamma(P)$$

Si les hypothèses H_0 et H_1 sont distinctes pour toute sous-chaîne irréductible de la chaîne de Markov considérée et si $P \in \mathcal{P}$, nous savons que la matrice $[I - \Omega(P)]$ est régulière

d'où $$L(P) = [I - \Omega(P)]^{-1} \; \Gamma(P)$$

Appelons $L_h(P)$ la fonction d'efficacité sachant que $Z_0 = g\,\delta_h$

$$L_h(P) = \sum_{j=1}^{m} L(P)_{M_h(0,j)} \; p_j(0)$$

-I- 4 FONCTION CARACTERISTIQUE DE N ET NOMBRE MOYEN D'OBSERVATIONS

Soit N le nombre d'observations nécessaires pour prendre une décision. Ici le nombre de transitions dont est composé l'échantillon est égal à N-1 .

Notons $\Phi_{M_h(0,i_0)}(t,P)$ la fonction caractéristique de N sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0,i_0)$

Posons $U_{M_h(0,i_0)}(t,p) = \sum_{n=1}^{f} e^{itn} \Pr\left[N=n/M_h(0,i_0)\right]$

Nous avons comme au chapitre II

$$\Phi_{M_h(0,i_0)}(t,P) = U_{M_h(0,i_0)}(t,P) + \sum_{M_\ell(f,i_f) \in DM_h(0,i_0)} e^{itf}\, \omega(P)\, \Phi_{M_h(0,i_0 M(f,i_f)M_\ell(f,i_f)}(t,P)$$

or $\Phi_{M_\ell(f,i_f)}(t,P) = \Phi_{M_\ell(0,i_f)}(t,P)$

d'où

$$\Phi_{M_h(0,i_0)}(t,P) = U_{M_h(0,i_0)}(t,P) + \sum_{M_\ell(f,i_f) \in DM_h(0,i_0)} e^{itf}\, \omega(P)\, \Phi_{M_h(0,i_0)M_\ell(f,i_f)M_\ell(f,i_f)}(t,P)$$

Soit $\Phi(t,P)$ la matrice (sm × 1) d'éléments $\Phi_{M_h(0,i_0)}(t,P)$

Soit $U(t,P)$ la matrice (sm × 1) d'éléments $U_{M_h(0,i_0)}(t,P)$

La relation précédente s'écrit matriciellement

$$\Phi(t,P) = U(t,P) + e^{itf}\, \Omega(P)\, \Phi(t,P)$$

Soit $$\left[I - e^{if}\,\Omega(P)\right]\,\Phi(t,P) = U(t,P)$$

Sous les hypothèses du théorème III 1 , nous démontrons aisément en appliquant le théorème de PERRON-FROBENIUS que la matrice $\left[I-e^{itf}\,\Omega(P)\right]$ est régulière , d'où

$$\Phi(t,P) = \left[I - e^{itf}\,\Omega(P)\right]^{-1} U(t,P)$$

Soit $\Phi_h(t,P)$ la fonction caractéristique de N sachant que $Z_0 = g\delta_h$

$$\Phi_h(t,P) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Phi(t,P)}{M_h(0,j)}\; p_j(0)$$

La matrice $\Phi(t,P)$ étant infiniment dérivable par rapport à t, les moments de tous ordre de N existent.

Le nombre moyen d'observations s'obtient facilement par dérivation de la fonction caractéristique

Soit $E(N,P)$ le nombre moyen d'observations, sachant que le $M_h(0,j)$ point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0,j)$

Soit $E_h(N,P)$ le nombre moyen d'observations sachant que $Z_0 = g\delta_h$

$$E_h(N,P) = \sum_{j=1}^{m} \frac{E(N,P)}{M_h(0,j)}\; p_j(0)$$

-II- DEUXIEME TYPE D'ECHANTILLON

Nous utilisons le type d'échantillonnage suivant :

Nous observons séquentiellement les transitions successives d'un échantillon constitué de plusieurs échantillons indépendants de taille fixée. Ceci est l'analogue séquentiel du type d'échantillonnage décrit par ANDERSON et GOODMAN [1] .

La probabilité d'avoir un échantillon donné de taille n s'écrit :

$$\prod_{k=1}^{m} p_k^{n_k}(0) \quad \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{m} p_{ij}^{n_{ij}}$$

avec

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m} n_k + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} = n \\ \sum_{i=1}^{m} (n_{ij} - n_{ji}) = \sum_{k=1}^{m} n_k \delta_{jk} - \sum_{k=1}^{m} \nu_k \delta_{jk} \end{cases}$$

n_k représentant le nombre d'échantillons commençant par l'état k.

ν_k représentant le nombre d'échantillons se terminant par l'état k .

Les hypothèses sont :

H_0 $\quad \pi(0) = {}^0\pi(0) \quad P = {}^0P$

H_1 $\quad \pi(0) = {}^1\pi(0) \quad P = {}^1P$

Posons

$$z_{ij} = \log \frac{{}^1p_{ij}}{{}^0p_{ij}}$$

$$z_k = \log \frac{{}^1p_k(0)}{{}^0p_k(0)}$$

$$Z_n = \sum_{k=1}^{m} n_k z_k + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} z_{ij}$$

Si $z_{ij} = a_{ij} g$ et $z_k = a_k g$

avec $g \in \mathbb{R}$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{Z}$

nous pouvons écrire la règle de décision :

$$\begin{cases} \text{tant que } d_0 < \sum_{k=1}^{m} a_k n_k + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} n_{ij} < d_1 & \text{une épreuve supplémentaire est nécessaire} \\ \text{dès que } \sum_{k=1}^{m} a_k n_k + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, n_{ij} \leq d_0 & \text{l'hypothèse } H_0 \text{ est acceptée} \\ \text{dès que } \sum_{k=1}^{m} a_k n_k + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, n_{ij} \geq d_1 & \text{l'hypothèse } H_1 \text{ est acceptée} \end{cases}$$

avec $d_0 \in \mathbb{R}$, $d_1 \in \mathbb{R}$ tels que $d_0 < 0 < d_1$

Nous considérons cette fois le déroulement du test comme la marche aléatoire d'un point M dans un espace euclidien à $m^2 + m$ dimensions.

A chaque transition (i,j) le point M se déplace d'un pas unité parallèlement à l'axe OX_{ij} correspondant. A chaque nouvel échantillon considéré d'état de départ k, le point M se déplace d'un pas unité parallèlement à l'axe OX_k correspondant.

Cette marche aléatoire est quasi-périodique. Pour le calcul des caractéristiques du test, la méthode précédente conduit à des expressions identiques à celles de AI 3 et AI 4 de ce chapitre

-III- TROISIEME TYPE D'ECHANTILLONNAGE

Nous allons maintenant montrer que pour une chaîne de Markov réductible et avec des hypothèses différentes de celles du théorème III 1 nous pouvons faire un test du rapport des probabilités de deux hypothèses simples qui conduit à une décision avec une probabilité unité.

Soit

$$H_\ell \begin{cases} \pi(0) = {}^\ell\pi(0) = |0|{}^\ell G| \\ {}^\ell P = \left[\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline {}^\ell E & {}^\ell F \end{array}\right] \end{cases}$$

$\ell = 0, 1$

Nous voyons que les hypothèses H_0 et H_1 sont identiques pour la sous chaîne irréductible définie par la matrice stochastique D .

Cette condition et les hypothèses du théorème III 1 sont incompatibles.

Soit la matrice

$$P = \left[\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline E & F \end{array}\right]$$

D donc F, ${}^0F$ et ${}^1F$ sont des matrices carrées

Pour $P \in \mathcal{P}$ il y a une probabilité strictement positive si nous observons le déroulement d'un seul échantillon de la chaîne de Markov, de ne pas prendre de décision

Supposons que D soit une matrice $(k \times k)$

Considérons la méthode d'échantillonnage suivante :

Nous observons séquentiellement les diverses transitions d'un premier échantillon de la chaîne de Markov.

Tant que nous demeurons dans les (m-k) derniers états de la chaîne (et tant que nous restons dans la zone d'indécision), nous continuons les observations.

Dès que nous arrivons dans un des k premiers état, nous arrêtons

l'échantillonnage et recommençons les observations sur un échantillon indépendant du précédent. Cette technique permet de minimiser le nombre moyen d'observations ; elle élimine en effet les transitions n'apportant aucune information , c'est à dire celles pour lesquelles les hypothèses H_0 et H_1 sont identiques.

Utiliser cette méthode revient à faire le test séquentiel du rapport des probabilités des hypothèses simples suivantes :

$$H_0^* \quad \begin{cases} \pi(0) = {}^0\pi(0) = [0 \mid {}^0G] \\ {}^0P^* = \left[\begin{array}{c|c} 0 & {}^0K \\ \hline {}^0E & {}^0F \end{array}\right] \end{cases}$$

$$H_1^* \quad \begin{cases} \pi(0) = {}^1\pi(0) = [0 \mid {}^1G] \\ {}^1P^* = \left[\begin{array}{c|c} 0 & {}^1K \\ \hline {}^1E & {}^1F \end{array}\right] \end{cases}$$

avec ${}^\ell G \quad \left[{}^\ell p_{k+1}(0) \quad {}^\ell p_{k+2}(0) \ldots\ldots {}^\ell p_m(0)\right]$

et

$${}^\ell K = \left[\begin{array}{c} {}^\ell G \\ \hline {}^\ell G \\ \hline \vdots \\ \hline {}^\ell G \end{array}\right] \qquad \ell = 0,1$$

La matrice ${}^\ell K$ a k lignes

nous sommes ramenés au test séquentiel du rapport des probabilités de deux hypothèses simples distinctes sur toute sous-chaîne irréductible de la chaîne de Markov considérée.

Soit

$$P^* = \left[\begin{array}{c|c} 0 & K \\ \hline E & F \end{array}\right]$$

Si la matrice P est telle que $P^* \in \mathcal{P}$ pour H_0^* et H_1^* le test a une probabilité un d'amener à une décision.

Enfin, les expressions des caractéristiques du test ont des formes identiques à celles trouvées plus haut.

B CHAINES DE MARKOV NON HOMOGENES FINIES

Nous étudions ici le test séquentiel du rapport des probabilités pour des chaînes de Markov non homogènes finies de deux hypothèses simples H_0 et H_1

$$H_0 \begin{cases} \pi(0) = {}^0\pi(0) \\ P(u) = {}^0P(u) \qquad \forall\, u = 1,2,\ldots\ldots, T \end{cases}$$

$$H_1 \begin{cases} \pi(0) = {}^1\pi(0) \\ P(u) = {}^1P(u) \qquad \forall\, u = 1,2,\ldots\ldots, T \end{cases}$$

L'échantillonnage considéré est l'échantillonnage de deuxième type avec des échantillons indépendants de taille T.

Si pour tout u = 1,2,....,T , nous nous plaçons sous les hypothèses du théorème III 1 , nous pouvons représenter le test par la marche aléatoire d'un point M dans un espace euclidien à $m + m^2 T$ dimensions si la chaîne de Markov considérée comporte m états.

Dans ce cas, la probabilité pour le point M de sortir de la zone d'indécision est 1 et les expressions des caractéristiques du test peuvent être trouvées par la méthode utilisée pour des chaînes de Markov homogènes finies dans le cas d'échantillonnage du deuxième type.

Si pour tout u = 1,2,....,T , les hypothèses du théorème III 1 , ne sont pas satisfaites nous pouvons faire un échantillonnage de troisième type tel que la taille maximum des échantillons indépendants utilisés soit T.

Les expressions des caractéristiques du test sont encore trouvées par des méthodes analogues à celles utilisées pour les tests de chaînes de Markov homogènes finies.

C CHAINES DE MARKOV HOMOGENES DENOMBRABLES

Les états de la chaîne de Markov considérée sont maintenant en quantité dénombrable, les notations restant inchangées.

Nous étudions donc un test des hypothèses simples suivantes :

$$H_0 \quad \begin{cases} \pi(0) = {}^0\pi(0) \\ P = {}^0P \end{cases}$$

$$H_1 \quad \begin{cases} \pi(0) = {}^1\pi(0) \\ P = {}^1P \end{cases}$$

-I- HYPOTHESES DISTINCTES POUR UN NOMBRE FINI DE TRANSITIONS

$$\text{Si} \qquad z_{ij} = \log \frac{{}^1p_{ij}}{{}^0p_{ij}} \qquad i = 1,2,\ldots\ldots, \quad j = 1,2,\ldots\ldots$$

$$\text{et} \qquad z_k = \log \frac{{}^1p_k(0)}{{}^0p_k(0)} \qquad k = 1,2,\ldots\ldots$$

nous considérons le cas où z_{ij} est différent de zéro pour un nombre fini de transitions.

Nous supposons en outre que, si I est l'ensemble des états i pour lesquels il existe j tel que $z_{ij} \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} {}^0p_k(0) \neq 0 \\ {}^1p_k(0) \neq 0 \end{array}\right\} \quad \forall k \in I$$

et

$${}^0p_k(0) = {}^1p_k(0) = 0 \qquad \forall\, k \notin I$$

D'où $k \in I \Longrightarrow \Pr\left[z_{kj} = 0\right] < 1$ pour la première transition d'un échantillon.

D'autre part, nous supposons réalisées les conditions du théorème III 1, à savoir que les hypothèses H_0 et H_1 sont distinctes pour toute sous chaîne irréductible de la chaîne de Markov considérée et que $P \in \mathcal{P}$ si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des matrices de transition telles que la probabilité de sortir de la zone d'indifférence est strictement positive quels que soient

le point de départ de la marche aléatoire et l'état initial de la chaîne de Markov.

Nous considérons l'échantillonnage de troisième type ; tant que l'échantillon de la chaîne de Markov est dans un état correspondant aux valeurs non nulles de z_{ij} (et tant que le point aléatoire est dans la zone d'indécision) nous continuons les observations. Dès que l'échantillon arrive dans un état correspondant à une valeur nulle de z_{ij} , nous arrêtons les observations et nous les reprenons sur un échantillon de la chaîne de Markov indépendant du précédent.

Alors, nous pouvons démontrer que le test permet de prendre une décision avec une probabilité 1 et nous sommes ramenés aux types précédents d'expressions des caractéristiques du test.

-II- HYPOTHESES DISTINCTES POUR UNE QUANTITE DENOMBRABLE DE TRANSITIONS

Nous pouvons aussi considérer l'échantillonnage de premier type dans les conditions suivantes :

Les matrices ${}^0p$ et ${}^1p$ ont des éléments p_{ij} non nuls pour les mêmes couples d'indices (i,j).

Les vecteurs ${}^0\pi(0)$ et ${}^1\pi(0)$ sont des éléments $p_k(0)$ non nuls pour les mêmes valeurs de l'indice k.

D'autre part sous les hypothèses H_0 et H_1 le nombre de valeurs possibles de p_{ij} et $p_k(0)$ est fini, ce qui implique l'existence d'un nombre fini de valeurs non nulles de z_{ij} et de z_k .

Nous allons illustrer ce cas par un exemple simple correspondant à un processus de naissance à temps discret.

$$ {}^\ell\pi(0) = [1,0,\ldots\ldots\ldots\ldots,0,\ldots\ldots\ldots] $$

$$ {}^\ell H \qquad {}^\ell p = \begin{vmatrix} {}^\ell p_1 & {}^\ell p_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & {}^\ell p_m \\ & {}^\ell p_1 \quad {}^\ell p_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & {}^\ell p_m \\ & & \\ & {}^\ell p_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & {}^\ell p_m \end{vmatrix} $$

pour $\ell = 0,1$

d'où

$$z_{i,1+h-1} = \begin{cases} \log \dfrac{{}^{1}p_h}{{}^{0}p_h} & h \in \{1,2,\ldots\ldots, m\} \\ 0 & h \notin \{1,2,\ldots\ldots, m\} \end{cases}$$

$\forall\, i = 1,2,\ldots\ldots$

$z_k = 0 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$

Nous sommes ramenés à un test séquentiel multinomial .

En effet, si n_h est le nombre de transitions (i, i+h) observées pour tout i, nous avons :

$$\begin{cases} n = \sum_{h=1}^{m} n_h \\ Z_n = \sum_{h=1}^{m} n_h \operatorname{Log} \dfrac{{}^{1}p_h}{{}^{0}p_h} \end{cases}$$

Le logarithme du rapport des probabilités a bien la même forme que dans le cas multinomial. D'autre part la probabilité d'accepter l'hypothèse $H_\ell (\ell = 0,1)$ en un nombre quelconque de pas, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0,i_0)$ est indépendante de i_0.

Nous pouvons donc affirmer qu'une décision sera prise avec une probabilité un et nous savons calculer les caractéristiques exactes du test.

C H A P I T R E -IV-

CARACTERISTIQUES DU TEST SEQUENTIEL DU RAPPORT DES PROBABILITES APPLIQUE A CERTAINS PROCESSUS ALEATOIRES CONTINUS DANS LE TEMPS

Tout au long de ce chapitre, nous appellerons échantillon d'un processus aléatoire continu dans le temps, une réalisation de durée t de ce processus observée de façon continue .

A. RESULTATS DE DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ

DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ [10] ont considéré l'application à certains processus aléatoires du test séquentiel du rapport des probabilités de deux hypothèses simples.

Les processus aléatoires étudiés par ces auteurs possèdent les propriétés suivantes :

- Pout tout $t \geq 0$, $X(t)$ est une statistique exhaustive, c'est-à-dire, la distribution conditionnelle du processus $X(\tau)$ pour $0 \leq \tau \leq t$ connaissant $X(t)$ est la même sous les deux hypothèses.

- La probabilité que $X(t)$ soit égal à x (processus discret) ou compris entre x et x + dx (processus de diffusion) existe et est notée $f_\ell(x,t)$ sous l'hypothèse H_ℓ $(\ell = 0,1)$

$$\text{Soit} \quad Z(t) = \text{Log} \frac{f_1(x,t)}{f_0(x,t)}$$

Nous admettons $Z(0)=0$

- Z(t) est un processus aléatoire à accroissements indépendants et stationnaires.

Les auteurs démontrent que les propriétés d'optimalité du test séquentiel du rapport des probabilités établies pour des variables aléatoires sont conservées.

Deux processus aléatoires sont plus particulièrement considérés : Le processus de Wiener-Levy et le processus de Poisson.

Pour le processus de Wiener-Levy et plus généralement pour les processus de diffusion ayant les propriétés précédentes, les expressions données par WALD pour les caractéristiques du test séquentiel, qui étaient des approximations dans le cas de tests d'hypothèses sur les lois de variables aléatoires, deviennent des expressions exactes. En effet dans le cas des processus de diffusion, l'hypothèse H_0 (respectivement H_1) est acceptée si Z(t) = Log B (respectivement Z(t) = Log A) ; il n'y a donc aucun dépassement de frontière.

Pour le processus de Poisson, il y a une probabilité strictement positive d'avoir un dépassement d'une frontière, les auteurs trouvent tout de même des expressions exactes de la fonction d'efficacité et du temps moyen d'observation liés au test séquentiel.

B . TEST D'HYPOTHESES SUR LE PARAMETRE D'UN PROCESSUS DE POISSON

Dans cette section, nous utilisons les propriétés d'une marche aléatoire pour calculer les caractéristiques exactes d'un test séquentiel d'hypothèses sur le paramètre d'un processus de Poisson X(t). Cette méthode est différente de la précédente et conduit à des expressions simples. Elle permet d'autre part de résoudre de nouveaux problèmes abordés plus loin.

-I- PRELIMINAIRES

Considérons un processus de Poisson X(t) homogène de paramètre λ.

Soient les hypothèses simples :

$$H_0 \quad \lambda = \lambda_0$$

$$H_1 \quad \lambda = \lambda_1$$

avec $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_1 > \lambda_0$

Considérons un échantillon de taille t du processus de Poisson, tel qu'à l'instant t le processus soit dans l'état x $(X(t) = x)$

Le logarithme du rapport des probabilités s'écrit

$$Z(t) = x \operatorname{Log} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1)t$$

La règle de décision est :

$$\begin{cases} \text{Tant que } \operatorname{Log} B < Z(t) < \operatorname{Log} A & \text{Nous continuons à observer le processus} \\ \text{Dès que } Z(t) = \operatorname{Log} B & \text{L'hypothèse } H_0 \text{ est acceptée} \\ \text{Dès que } Z(t) \geq \operatorname{Log} A & \text{L'hypothèse } H_1 \text{ est acceptée} \end{cases}$$

Remarque : Nous constatons qu'il n'y a dépassement de frontière que dans le cas de l'acceptation de l'hypothèse H_1, ce qui sera approfondi plus loin.

Soit $\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s\}$ l'ensemble des réels δ_h appartenant à $]\operatorname{Log} B, \operatorname{Log} A[$ et tels que $\dfrac{\delta_h}{\operatorname{Log} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}}$ soit entier

$$Z(0) \in \{\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_s\}$$

Pour $t = \dfrac{\text{Log}\,\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}}{\lambda_1 - \lambda_0}$ (soit τ cette valeur), l'équation

$$x \ \text{Log}\ \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1)t = \delta_h$$

admet une solution entière en x

$$x = \frac{\delta_h}{\text{Log}\,\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}} + 1$$

D'où

$$Z(\tau) \in \ ]\ \text{Log}\ B,\ \text{Log}A\ [\Longrightarrow Z(\tau) \in \{\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_s\}$$

Nous considérons le déroulement du test comme la marche aléatoire dans le plan d'un point (x,t) se déplaçant de façon continue parallèlement à l'axe Ot et d'un pas unité parallèlement à l'axe Ox à chaque changement d'état du processus de Poisson. Ce qui précède montre clairement que cette marche aléatoire est quasi-périodique.

Soit $M_h(0)$ le point de coordonnées

$$\begin{cases} t = 0 \\ x = \dfrac{\delta_h}{\text{Log}\,\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}} \end{cases}$$

Soit $M_\ell(\tau)$ le point de coordonnées

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{\text{Log}\,\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}}{\lambda_1 - \lambda_0} \\ x = \dfrac{\delta_\ell}{\text{Log}\,\dfrac{1}{0}} + 1 \end{cases}$$

Aux points $M_h(0)$ et $M_\ell(\tau)$ correspondent $Z(0) = \delta_h$ et $Z(\tau) = \delta_\ell$

Appelons $p_{h\ell}(\lambda)$ la probabilité d'atteindre le point $M_\ell(\tau)$ sans sortir de la zone d'indécision, pour la valeur λ du paramètre, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$.

Soit $S_h(\lambda)$ la probabilité de ne pas prendre de décision, pour la valeur λ du paramètre, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$. La probabilité de ne pas prendre de décision, pour la valeur λ du paramètre, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(\tau)$ est aussi égale à $S_h(\lambda)$; ceci est une conséquence de la quasi-périodicité de la marche aléatoire et du fait que le processus de Poisson est à accroissements indépendants.

Nous obtenons donc :

$$S_h(\lambda) = \sum_{\ell=1}^{s} p_{h\ell}(\lambda) \; S_\ell(\lambda)$$

Soit $S(\lambda)$ la matrice colonne $(s \times 1)$ d'éléments $S_h(\lambda)$

Soit $P(\lambda)$ la matrice carrée $(s \times s)$ d'éléments $p_{h\ell}(\lambda)$

Nous avons :

$$S(\lambda) = P(\lambda) \; S(\lambda)$$

La matrice $P(\lambda)$ est à éléments non négatifs ; de plus la somme des éléments de chacun de ses lignes est strictement inférieur à l'unité. D'où la matrice $[I - P(\lambda)]$ est régulière (théorème de PERRON-FROBENIUS) et :

$$S(\lambda) = [I - P(\lambda)]^{-1} \; [CO] = [CO]$$

Nous retrouvons donc que la probabilité de prendre une décision est égale à un quels que soient le point de départ de la marche aléatoire et la valeur du paramètre.

-II- FONCTION D'EFFICACITE

Soit $\gamma_h(\lambda)$ la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 pour $t \leq \tau$ et pour la valeur λ du paramètre, sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$

Soit $L_h(\lambda)$ la probabilité d'accepter H_0 pour la valeur λ du paramètre sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$. Nous avons comme pour $S_h(\lambda)$, la même valeur $L_h(\lambda)$ si ce point de départ de la marche aléatoire est $M_h(\tau)$

d'où :

$$L_h(\lambda) = \gamma_h(\lambda) + \sum_{\ell=1}^{s} p_{h\ell}(\lambda)\, L_\ell(\lambda)$$

Soit $\Gamma(\lambda)$ la matrice colonne $(s \times 1)$ d'éléments $\gamma_h(\lambda)$

Soit $L(\lambda)$ la matrice colonne $(s \times 1)$ d'éléments $L_h(\lambda)$

Nous avons :

$$L(\lambda) = \Gamma(\lambda) + P(\lambda)\, L(\lambda)$$

Soit

$$L(\lambda) = \left[I - P(\lambda)\right]^{-1} \Gamma(\lambda)$$

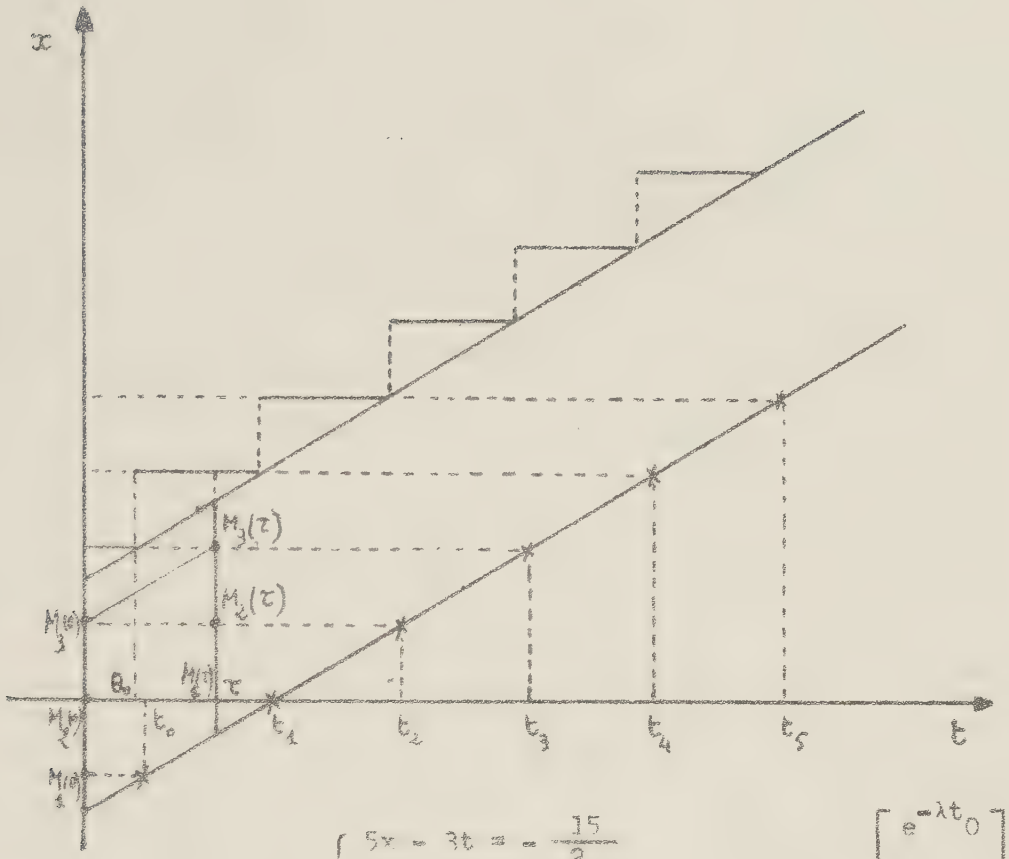
Les éléments de $\Gamma(\lambda)$ et $P(\lambda)$ se calculent très aisément (voir figure IV-1-).

-III- FONCTION CARACTERISTIQUE DE T

T est la variable aléatoire représentant le temps nécessaire pour prendre une décision ; elle est donc l'analogue de la variable aléatoire N des chapitres précédents.

Soit $\Phi_h(u,\lambda) = E\left[e^{iuT}/M_h(0)\right]$ la fonction caractéristique de T sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$.

Nous avons vu qu'il n'y a dépassement de frontière que pour l'acceptation de l'hypothèse H_1 . En effet, pour tout x fixé, Z(t) est une fonction continue décroissante de t. D'où la frontière Log B est atteinte exactement si l'hypothèse H_0 est acceptée. Nous en déduisons la forme de la loi de la variable aléatoire T.



$$\text{Frontières} \begin{cases} 5x - 3t = -\frac{15}{2} \\ 5x - 3t = 8 \end{cases} \qquad \Gamma(\lambda) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda t_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau = \frac{5}{3} \qquad t_0 = \frac{5}{6} \qquad \theta_0 = \frac{2}{3}$$

$$P(\lambda) = e^{-\lambda\tau} \begin{bmatrix} \lambda t_0 & \lambda^2 t_0(\tau - \frac{t_0}{2}) & \lambda^3 \left| t_0\, \tau(\tau - t_0) + (t_0 - \theta_0)^3 \right| \\ 1 & \lambda\tau & \lambda^2 \dfrac{\tau^2 - \theta_0^2}{2} \\ 0 & 1 & \lambda(\tau - \theta_0) \end{bmatrix}$$

FIGURE IV - 1

Soit t_k ($k = 0,1,2,....$) une des valeur que T peut prendre avec une probabilité non nulle. (Ces valeurs t_k sont les solutions en t de l'équation $Z(t) = \text{Log } B$ pour $x > \frac{\text{Log } B}{\text{Log}\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}$; elles correspondent donc à l'acceptation de l'hypothèse H_0).

Soit $g_h(t)$ la densité de probabilité de T sachant que le point de départ de la marche aléatoire est $M_h(0)$. $g_h(t)$ est définie pour tout $t \neq t_k$ $(k = 0,1,2,.....)$. (Ceci correspond à l'acceptation de l'hypothèse H_1).

Nous pouvons poser $g_h(t_k) = 0$

Nous avons $t_k = \tau + t_{k-1}$

soit

$$t_k = t_0 + k\tau$$

$$\Phi_h(u,\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{iut}\, g_h(t)\, dt + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{iut_k} \Pr\left[T = t_k / M_h(0)\right]$$

Posons $K_h(u,\lambda) = \int_0^{\tau} e^{iut}\, g_h(t)\, dt + e^{iut_0} \Pr\left[T = t_0 / M_h(0)\right]$

Alors $\Phi_h(u,\lambda) = K_h(u,\lambda) + \int_{\tau}^{+\infty} e^{iut}\, g_h(t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} e^{iut_k} \Pr\left[T=t_k/M_h(0)\right]$

or

$$\begin{cases} g_h(t) = \sum_{\ell=1}^{S} p_{h\ell}(\lambda)\, g_\ell(t-\tau) & t > \tau \\ \Pr\left[T=t_k/M_h(0)\right] = \sum_{\ell=1}^{S} p_{h\ell}(\lambda) \Pr\left[T=t_{k-1}/M(\tau)\right] & k > 0 \end{cases}$$

d'où

$$\Phi_h(u,\lambda) = K_h(u,\lambda) + \sum_{\ell=1}^{S} p_{h\ell}(\lambda)\, e^{iu\tau} \int_{\tau}^{+\infty} g_\ell(t-\tau)\, e^{iu(t-\tau)}\, dt$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{S} p_{h\ell}(\lambda)\, e^{iu\tau} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{iut_{k-1}} \Pr\left[T=t_{k-1}/M_\ell(\tau)\right]$$

soit $\Phi_h(u,\lambda) = K_h(u,\lambda) + \sum_{\ell=1}^{s} e^{iu\tau} P_{h\ell}(\lambda)\, \Phi_\ell(u,\lambda)$

Soit $K(u,\lambda)$ la matrice colonne $(s \times 1)$ d'éléments $K_h(u,\lambda)$

Soit $\Phi(u,\lambda)$ la matrice colonne $(s \times 1)$ d'éléments $\Phi_h(u,\lambda)$

Nous pouvons écrire :

$$\Phi(u,\lambda) = K(u,\lambda) + e^{iu\tau} P(\lambda)\, \Phi(u,\lambda)$$

La matrice $\left[I - e^{iu\tau} P(\lambda)\right]$ est régulière (théorème de PERRON-FROBENIUS)

d'où

$$\Phi(u,\lambda) = \left[I - e^{iu\tau} P(\lambda)\right]^{-1} K(u,\lambda)$$

Soit en posant $R(u,\lambda) = \left[I - e^{iu\tau} P(\lambda)\right]$

$$\Phi(u,\lambda) = R^{-1}(u,\lambda)\, K(u,\lambda)$$

IV- TEMPS MOYEN D'OBSERVATION

De la relation

$$\Phi(u,\lambda) = K(u,\lambda) + e^{iu\tau} P(\lambda)\, \Phi(u,\lambda)$$

nous déduisons en dérivant par rapport à u :

$$\frac{\partial \Phi(u,\lambda)}{\partial u} = \frac{\partial K(u,\lambda)}{\partial u} + i\tau\, e^{iu\tau} P(\lambda)\, \Phi(u,\lambda) + e^{iu\tau} P(\lambda)\, \frac{\partial \Phi(u,\lambda)}{\partial u}$$

Posons $H(u,\lambda) = \frac{1}{i} \frac{\partial K(u,\lambda)}{\partial u}$

Soit $E_h(T,\lambda)$ le temps moyen d'observation, pour la valeur λ du paramètre, sachant que $M_h(0)$ est le point de départ de la marche aléatoire.

Soit $E(T,\lambda)$ la matrice colonne $(s \times 1)$ d'éléments $E_h(T,\lambda)$

Nous avons :

$$E(T,\lambda) = H(0,\lambda) + \tau P(\lambda) \quad [C1] + P(\lambda)\, E(T,\lambda)$$

soit

$$E(T,\lambda) = \tau R^{-1}(0,\lambda)\, P(\lambda)\, [C1] + R^{-1}(0,\lambda)\, H(0,\lambda)$$

-V- GENERALISATION

Nous indiquons ici une généralisation qui nous sera utile ultérieurement.

Soit le processus aléatoire à m dimensions :

$$X(t) = [X_1(t)\ ,\ X_2(t)\ ,\ \ldots\ldots,\ X_m(t)]$$

où les processus aléatoire $X_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots\ldots,m)$ sont des processus de Poisson indépendants de paramètre λ_i

Si nous faisons le test des hypothèses

$$H_0 \qquad \lambda_i = \lambda_{i0} \qquad\qquad i = 1,2,\ldots\ldots,m$$

$$H_1 \qquad \lambda_i = \lambda_{i1} \qquad\qquad i = 1,2,\ldots\ldots,m$$

le logarithme du rapport des probabilités pour un échantillon donné s'écrit

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{m} x_i \operatorname{Log} \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i0}} + t \sum_{i=1}^{m} (\lambda_{i0} - \lambda_{i1})$$

Nous considérons le déroulement du test comme la marche aléatoire dans un espace à (m+1) dimensions d'un point se déplaçant de façon continue parallèlement à l'axe Ot et d'un pas unité, à chaque changement d'état d'un des processus de Poisson indépendants, parallèlement à l'axe correspondant. Il est aisé de montrer que cette marche aléatoire est quasi-périodique. Les expressions des caractéristiques du test sont identiques à celles obtenues pour le test de deux hypothèses simples sur le paramètre d'un processus de Poisson à une dimension. Seuls les éléments et la taille des matrices utilisées sont différents .

C. TEST SEQUENTIEL DU RAPPORT DES PROBABILITES APPLIQUE AUX PROCESSUS DE NAISSANCE ET MORT.

La méthode précédente peut être utilisée pour étudier des tests d'hypothèses sur les paramètres de processus proches du processus de Poisson.

-I- PROCESSUS DE NAISSANCE LINEAIRE

Le processus de Naissance linéaire X(t) est défini par

$$\Pr\left[X(t+dt) = k+1 \,/\, X(t) = k\right] = \lambda k \; dt + 0_{1k}(dt)$$

$$\Pr\left[X(t+dt) = k \,/\, X(t) = k\right] = 1 - \lambda k \; dt + 0_{2k}(dt)$$

où $k \geq 1$, $\lambda > 0$ et où $0_{1k}(dt)$ et $0_{2k}(dt)$ sont des infiniments petits par rapport à dt.

Pour un tel processus, les variables aléatoires $T_k (k = 1,2,....)$ représentant la durée de séjour dans l'état k du processus sont indépendantes et exponentielles de paramètre λk .

Soit $f_k(\theta)$ la densité de probabilité de T_k

$$f_k(\theta) = \begin{cases} \lambda k e^{-\lambda k \theta} & \theta \geq 0 \\ 0 & \theta < 0 \end{cases}$$

Considérons un échantillon de durée t du processus d'état initial 1 et d'état final x .

Nous définissons un nouvel échantillon extrait de ce dernier en découpant le segment $[0,t]$ en segments de longueur $dt = \frac{t}{n}$.

Si nous notons n_i le nombre de segments de longueur dt dans lesquels le processus reste dans l'état i, la probabilité du nouvel échantillon est :

$$\prod_{i=1}^{x-1} \left[\lambda i\ dt + 0_{1i}(dt)\right] \prod_{i=1}^{x} \left[1 - \lambda i dt + 0_{2i}(dt)\right]^{n_i} . \left[1 + 0(dt)\right]$$

où $0(dt)$ est un infiniment petit par rapport à dt.

Appelons $Z(t)$ le logarithme du rapport des probabilités pour le premier échantillon sous les hypothèses H_ℓ : $\lambda = \lambda_\ell$ $(\ell = 0,1)$

$$Z(t) = \lim_{n \to +\infty} Z_n(t)$$

avec

$$Z_n(t) = \sum_{i=1}^{x-1} \text{Log}\left[\frac{\lambda_1 i dt + 0_{1i}(dt,\lambda_1)}{\lambda_0 i dt + 0_{1i}(dt,\lambda_0)}\right] + \sum_{i=1}^{x} n_i \text{Log}\left[\frac{1-\lambda_1 i dt + 0_{2i}(dt,\lambda_1)}{1-\lambda_0 i dt + 0_{2i}(dt,\lambda_0)}\right] + \text{Log}\left[\frac{1+0(dt,\lambda_1)}{1+0(dt,\lambda_0)}\right]$$

d'où nous déduisons :

$$Z(t) = (x-1)\text{Log}\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1) \sum_{i=1}^{x} i t_i$$

où t_i est la durée de séjour de l'échantillon du processus de naissance dans l'état i. $(t = \sum_{i=1}^{x} t_i)$.

La règle de décision est, comme dans le processus de Poisson

$$\begin{cases} \text{Tant que } \operatorname{Log} B < Z(t) < \operatorname{Log} A & \text{Nous continuons à observer le processus} \\ \text{Dès que } Z(t) = \operatorname{Log} B & \text{L'hypothèse } H_0 \text{ est acceptée} \\ \text{Dès que } Z(t) > \operatorname{Log} A & \text{L'hypothèse } H_1 \text{ est acceptée} \end{cases}$$

Nous considérons ici le déroulement du test comme la marche aléatoire dans le plan rapporté à deux axes orthonormés d'un point de coordonnées $t^* = \sum_{i=1}^{x} it_i$ et $x - 1$. Ce point décrit le graphe d'une réalisation d'un processus de Poisson de paramètre λ.

En effet, si nous pouvons construire un processus de naissance à partir des variables aléatoires indépendantes T_k définies précédemment, le processus construit à partir des variables aléatoires $T_k^* = k\,T_k$ est un processus de Poisson. Car si $f^*_k(\theta)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire T_k^*

$$f_k^*(\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\theta} & \theta \geq 0 \\ 0 & \theta < 0 \end{cases}$$

Les variables aléatoires T_k^* sont des variables aléatoires indépendantes exponentielles de paramètre λ.

Nous sommes donc ramenés au test des hypothèses H_ℓ : $\lambda=\lambda_\ell$ ($\ell= 0,1$) sur le paramètre λ d'un processus de Poisson. Si nous acceptons H_0 pour le test sur le processus de naissance linéaire, nous acceptons l'hypothèse H_0 pour le processus de Poisson, et réciproquement. Or nous savons calculer de façon simple la fonction d'efficacité d'un test sur le paramètre d'un processus de Poisson. Les fonctions d'efficacités des deux tests étant identiques, nous obtenons donc ainsi la fonction d'efficacité du test sur le paramètre d'un processus de naissance linéaire.

Par contre les temps moyens d'observation des deux tests sont différents .

Pour le test sur le paramètre du processus de Poisson, le temps moyen d'observation pour la valeur λ du paramètre est :

$$E_\lambda(T^*) = E_\lambda \left[\sum_{i=1}^{N} T^*_i \right] = E_\lambda \left[\sum_{i=1}^{N} iT_i \right]$$

Pour le test sur le paramètre du processus de naissance linéaire, le temps moyen d'observation est :

$$E_\lambda(T) = E_\lambda \left[\sum_{i=1}^{N} T_i \right]$$

Si le calcul des valeurs exactes de $E_\lambda(T^*)$ est donné en B.-IV- de ce chapitre, nous ne connaissons pas de méthode permettant de trouver les valeurs exactes de $E_\lambda(T)$.

Dans cette section, nous avons supposé que l'état initial du processus de naissance était $X(0) = 1$. Les résultats s'étendent sans difficulté au cas $X(0) > 1$.

-II- PROCESSUS DE MORT LINEAIRE

Un processus de mort linéaire est défini par :

$$\Pr\left[X(t + dt) = k-1 / X(t) = k\right] = \mu k \, dt + 0_{1k}(dt)$$

$$\Pr\left[X(t + dt) = k / X(t) = k\right] = 1 - \mu k \, dt + 0_{2k}(dt)$$

où $1 \leq k \leq x_0$, $\mu > 0$ et où $0_{1k}(dt)$ et $0_{2k}(dt)$ sont des infiniment petits par rapport à dt.

Pour un tel processus, les variables aléatoires $T_k(k=x_0, x_0-1, \ldots, 1)$ représentant la durée de séjour dans l'état k du processus sont indépendantes et exponentielles de paramètre μk .

Soit $g_k(\theta)$ la densité de probabilité de T_k

$$g_k(\theta) = \begin{cases} \mu k e^{-\mu k} & \theta \geq 0 \\ 0 & \theta < 0 \end{cases}$$

Considérons un échantillon de durée t du processus d'état initial x_0 et d'état final x.

Découpons comme précédemment le segment $[0,t]$ en segments de longueur $dt = \frac{t}{n}$

La probabilité du nouvel échantillon ainsi défini est :

$$\prod_{i=x_0}^{x+1} [\mu i dt + 0_{1i}(dt)] \prod_{i=x_0}^{x} [1 - \mu i dt + 0_{2i}(dt)]^{n_i} [1 + 0(dt)]$$

Nous en déduisons Z(t) le logarithme du rapport des probabilités pour les hypothèses H_ℓ : $\mu = \mu_\ell$ ($\ell = 0,1$)

$$Z(t) = (x_0 - x) \operatorname{Log} \frac{\mu_1}{\mu_0} + (\mu_0 - \mu_1) \sum_{i=x_0}^{x} it_i$$

où t_i est la durée de séjour dans l'état i . $(t = \sum_{i=x_0}^{x} t_i)$.

La règle de décision étant identique à la précédente, nous considérons le déroulement du test comme la marche aléatoire dans le plan rapporté à deux axes orthonormés d'un point de coordonnées $t^* = \sum_{i=x_0}^{x} it_i$ et $x_0 - x$. De même que pour le processus de naissance linéaire étudié plus haut, ce point décrit le graphe de la réalisation d'un processus de Poisson de paramètre μ . Nous sommes donc ramenés au test séquentiel du rapport des probabilités des hypothèses H_ℓ : $\mu = \mu_\ell$ ($\ell = 0,1$) sur le paramètre μ d'un processus de Poisson. Nous savons donc calculer la fonction d'efficacité du test sur le paramètre μ du processus de mort linéaire. Cependant une différence existe avec le cas du processus de naissance linéaire. En effet il y a une probabilité strictement positive de n'avoir pris aucune décision

lors de l'arrivée de l'échantillon du processus de mort linéaire dans l'état absorbant 0 . Nous devons donc considérer une technique d'échantillonnage différente de la précédente pour avoir un test séquentiel permettant de prendre une décision avec une probabilité 1 .

Nous pouvons opérer ainsi : Si nous n'avons pas pris de décision à l'arrivée de l'échantillon du processus de mort linéaire dans l'état absorbant 0, nous continuons l'échantillonnage avec un nouvel échantillon du processus de mort indépendant du précédent d'état initial quelconque positif. Ce type d'échantillonnage est l'analogue continu du type III d'échantillonnage vu au chapitre III .

-III- PROCESSUS DE NAISSANCE ET MORT LINEAIRE

Un processus de naissance et mort linéaire est défini par :

$$\Pr\left[X(t+dt) = k+1/X(t)=k\right] = \lambda k\, dt + o_{1k}(dt)$$

$$\Pr\left[X(t+dt) = k-1/X(t)=k\right] = \mu k\, dt + o_{2k}(dt)$$

$$\Pr\left[X(t+dt) = k\ /X(t)\ =k\right] = 1 - (\lambda+\mu)k\, dt + o_{3k}(dt)$$

$$X(0) = n_0$$

où $1 \leq k \leq n_0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et où $o_{1k}(dt)$, $o_{2k}(dt)$ et $o_{3k}(dt)$ sont des infiniment petits par rapport à dt.

Les variables aléatoires $T_k (k \geq 1)$ représentant la durée de séjour dans l'état k du processus de naissance et mort linéaire sont indépendantes et exponentielles de paramètre $(\lambda+\mu)k$.

Soient les hypothèses

$$H_0 \quad \begin{cases} \lambda = \lambda_0 \\ \mu = \mu_0 \end{cases}$$

$$H_1 \quad \begin{cases} \lambda = \lambda_1 \\ \mu = \mu_1 \end{cases}$$

Le logarithme du rapport des probabilités s'écrit :

$$Z(t) = x \operatorname{Log} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + y \operatorname{Log} \frac{\mu_1}{\mu_0} + (\lambda_0+\mu_0-\lambda_1-\mu_1) \sum_{i=0}^{x+y} (n_0+x_i-y_i)\, t_{n_0+x_i-y_i}$$

où $t_{n_0+x_i-y_i}$ est la durée de séjour dans l'état $n_0+x_i-y_i$, n_0 l'état initial de l'échantillon du processus et n_0+x-y son état final (x : nombre de naissances ; y : nombre de morts) .

Nous considérons le déroulement du test comme la marche aléatoire dans un espace à trois dimensions rapporté à trois axes orthonormés d'un point de coordonnées $t^* = \sum_{i=0}^{x+y} (n_0+x-y)t_{n_0+x-y}$, x,y . Ce point décrit le graphe d'un échantillon d'un processus de Poisson à deux dimensions $[X_1(t), X_2(t)]$ ($X_1(t)$ et $X_2(t)$ indépendants) de paramètre λ et μ .

Nous sommes donc ramenés au test séquentiel du rapport des probabilités des hypothèses H_ℓ $\lambda = \lambda_\ell$, $\mu = \mu_\ell$ ($\ell = 0,1$) sur les paramètres λ et μ d'un processus de Poisson à deux dimensions, problème abordé en B. -V- de ce même chapitre. Nous savons donc calculer les fonctions d'efficacité du test sur les paramètres du processus de naissance et mort.

D. CARACTERISTIQUES EXACTES DU TEST SEQUENTIEL DU RAPPORT DES PROBABILITES SUR LE PARAMETRE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE EXPONENTIELLE

Nous utilisons une méthode qui nous ramène à l'étude de tests séquentiels d'hypothèses sur le paramètre d'un processus de Poisson et nous permet donc d'obtenir des caractéristiques simples pour les tests considérés.

-I- ECHANTILLONNAGE CLASSIQUE

Nous considérons ici l'échantillon formé du résultat d'épreuves indépendantes successives sur une variable exponentielle .

RAGHAVACHARI [37] dans un cas particulier, et SHORR [40] ont étudié le test séquentiel de deux hypothèses sur la loi d'une variable aléatoire exponentielle. SCHORR donne dans le cas général des expressions analytiques exactes des caractéristiques du test. Ces expressions sont analogues à celles trouvées par DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ [10] pour le test de deux hypothèses sur le paramètre d'un processus de Poisson. Ceci est naturel ; en effet, soit un échantillon $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_x$ obtenu à partir d'épreuves indépendantes sur la variable aléatoire exponentielle de paramètre λ . Le logarithme du rapport des probabilités s'écrit pour les hypothèses H_ℓ $\lambda=\lambda_\ell$ $(\ell=0,1)$:

$$Z(x) = x \operatorname{Log} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1)t$$

en posant $t = \sum_{i=1}^{x} t_i$.

Si nous considérons le déroulement du test comme la marche aléatoire dans le plan d'un point de coordonnées t et x , le graphe de cette marche aléatoire peut être considéré comme celui d'un échantillon d'un processus de Poisson de paramètre λ . Les tests présentent cependant une différence . Pour le test d'hypothèses sur le paramètre du processus de Poisson, l'hypothèse H_0 est acceptée pour $Z(t) = \operatorname{Log} B$; pour le test d'hypothèses sur le paramètre de la loi de la variable exponentielle , l'hypothèse H_0 est acceptée pour $Z(x) \leq \operatorname{Log} B$. Il y a donc dans le second cas dépassement de frontière . Mais ce dépassement est sans influence sur la valeur de la fonction d'efficacité ; en effet supposons qu'au cours de la marche aléatoire nous soyons après un changement d'état du processus à l'intérieur de la zone d'indécision à une distance τ de la frontière conduisant à l'acceptation de l'hypothèse H_0 . Les probabilités d'accepter l'hypothèse H_0 , sans changement d'état pour le processus, à la nouvelle observation pour la variable aléatoire, sont respectivement $\Pr[X(T) - X(T-\tau) = 0 \;/\; X(T-\tau) = k]$ et $\Pr(T_k > \tau)$. Ces deux probabilités ont la même valeur $e^{-\lambda\tau}$ D'où l'identité des fonctions d'efficacité.

Nous calculons d'autre part le nombre moyen d'observations à partir du temps moyen d'observation du test sur le paramètre du processus de Poisson

$$E_\lambda(T) = E_\lambda\left(\sum_{i=1}^{N} T_i\right) = \frac{1}{\lambda} E_\lambda(N)$$

soit

$$E_\lambda(N) = \lambda E_\lambda(T)$$

où N est la variables aléatoire représentant le nombre d'observations nécessaires pour prendre une décision.

-II- ECHANTILLONNAGE PAR GROUPE AVEC OU SANS REMPLACEMENT

EPSTEIN et SOBEL [12] étudiant les test séquentiels de durée de vie dans le cas exponentiel, donnent des approximations des caractéristiques de ces tests et renvoient à DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ [10] pour certaines caractéristiques exactes.

II- 1 Echantillonnage avec remplacement

Soient m objets pris au hasard dans une population. Nous observons la durée de vie de ces objets ; dès qu'un objet est hors d'usage, il est immédiatement remplacé par un autre objet pris au hasard dans la population.

Si nous supposons que les durées de vie des objets considérés peuvent être représentées par des variables aléatoires exponentielles de paramètre λ , la variable aléatoire représentant l'instant de la première défaillance et les variables aléatoires représentant le temps écoulé entre deux défaillances successives sont indépendantes et exponentielles de paramètre λm .

Nous pouvons exprimer cette propriété de façon différente :

Si nous considérons un objet et ses remplaçants successifs, les durées de vie de ces objets dont des variables aléatoires indépendantes et

exponentielles de paramètre λ . Si nous observons de façon continue ce processus de durée de vie et de remplacement, nous constatons que le processus représentant le nombre de remplacements en fonction du temps est un processus de Poisson de paramètre λ . Il y a donc m processus de Poisson indépendants de paramètre λ se déroulant simultanément. Le processus obtenu en faisant la somme de ces m processus est un processus de Poisson de paramètre λm . Nous sommes donc ramenés à considérer le test d'hypothèses sur le paramètre λm d'un processus de Poisson. Nous savons donc calculer de façon exacte la fonction d'efficacité $L(\lambda)$ et le temps moyen d'observation $E_\lambda(T)$.
Le nombre moyen $E_\lambda(N)$ d'objets utilisés, qui a ici un intérêt concret est donné par

$$E_\lambda(N) = \lambda m \, E_\lambda(T)$$

-II- 2. Echantillonnage sans remplacement

Soient m objets pris au hasard dans une population. Nous observons les durées de vie de ces objets. Un objet hors d'usage n'est pas remplacé.

Les variables aléatoires représentant les durées de vie des objets étant exponentielles de paramètre λ , soit T_i la variable aléatoire représentant le temps écoulé entre les défaillances, d'ordres i-1 et i (i=2,3,...,m). Soit T_1 la variable aléatoire représentant l'instant de la première défaillance. Les variables aléatoires T_i (i=1,2,.....,m) sont indépendantes et exponentielles de paramètre $\lambda(m-i+1)$. D'où le processus observé est un processus de mort linéaire de paramètre λ .

Nous savons donc calculer de façon exacte la fonction d'efficacité du test pour ce processus et si nous ne connaissons pas le temps moyen d'observation (approximation donnée dans [12]) , par contre, nous avons une expression exacte du nombre moyen d'objets utilisés $E_\lambda(N)$.

En effet, les variables aléatoires $T^*_i = (m-i+1)T_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$ étant indépendantes et exponentielles de paramètre λ , nous savons calculer $E_\lambda(T^*)$

or $$E_\lambda(T^*) = E_\lambda\left(\sum_{i=1}^{N} T^*_i \right) = \frac{1}{\lambda} \quad E_\lambda(N)$$

d'où

$$E_\lambda(N) = \lambda \, E_\lambda(T^*)$$

C O N C L U S I O N

Dans ce travail, nous avons voulu exposer essentiellement une méthode permettant de calculer certaines probabilités liées à diverses sortes de marches aléatoires quasi-périodiques, et ayant un champ d'application direct en analyse séquentielle, en particulier dans des situations pratiques telles que contrôle de fabrication et étude de fiabilité. Cette méthode est générale et peut donc être appliquée pour le calcul de probabilités liées à toute marche aléatoire quasi-périodique avec règle d'arrêt (ces règles d'arrêt peuvent être différentes de celle de WALD) ; nous pensons qu'elle peut être utilisée avec succès dans des questions non abordées dans cette étude liées ou non à l'analyse séquentielle .

- B I B L I O G R A P H I E -

[1] ANDERSON et GOODMAN — Statistical inference about Markov chains. Ann. Math. Stat. 28 (1957) p 89 - 110

[2] ARMITAGE — Some sequential tests of Student's hypotheses. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B (1947) p 250- 263

[3] ARMITAGE — Sequential analysis with more than two alternative hypotheses, and its relation to discriminant fonction analysis. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 12(1950) p 137- 144

[4] AROIAN — Sequential analysis, direct method. Technometrics Vol 10 N°1 (1968) p 125- 132

[5] BARRACLOUGH et PAGE — Tables for Wald tests for the mean of a normal distribution. Biometrika Vol 46 Part 1 et 2 (1959)p 169- 173

[6] BARTLETT — The frequency goodness of fit test for probability chains. Proc.Camb. Phil. Soc. 47 (1951) p 86 - 95

[7] BHAPUCHA - REID — Elements of the theory of Markov processes and their applications. Mc GRAW - HILL (1960)

[8] BILLINGSLEY — Statistical inference for Markov processes. CHICAGO PRESS (1961)

[9] COX et MILLER — Stochastic Processes. METHUEN (1965)

[10] DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ — Sequential decision problems for processes with continuous time parameter ; testing hypotheses. Ann. Math. Stat. 24 (1953) p 254- 264

[11] DIVATIA — A note on sequential exponential tests. J. Indian Soc. Agric. Stat.(1950)2 p 86 - 93

[12] EPSTEIN et SOBEL — Sequential life tests in the exponential case. Ann. Math. Stat. 26 (1955) p 82 - 93

[13] GANTMACHER — Théorie des matrices
Dunod (1966)

[14] GIRSHICK — Contributions to the theory of sequential analysis.
Ann. Math. Stat. 17 (1946)

[15] HAIT — Sur une expression matricielle simple de la fonction K(x, y) de Polya liée au test de Wald.
C. R. Acad. Sc. t 260 (1965) p 2705-2706

[16] HAIT — Sur des expressions exactes matricielles simples des fonctions OC, caractéristique et ASN du test binomial de Wald.
C. R. Acad. Sc. t 260 (1965) p 5681-5683

[17] HAIT — Caractéristiques exactes d'un test séquentiel bilatéral.
C. R. Acad. Sc. t 267 (1968) p 744- 747

[18] HAIT — Caractéristiques exactes d'un test séquentiel d'Armitage.
C. R. Acad. Sc. t 267 (1968) p 943- 945

[19] HAIT — Caractéristiques exactes d'un test séquentiel multinomial.
C. R. Acad. Sc. t 270 (1970) p 1529-1532

[20] HAIT — Caractéristiques exactes du test séquentiel du rapport des probabilités appliqué aux chaînes de Markov.
(En cours de transmission)

[21] KARLIN — Initiation aux Processus aléatoires.
Dunod (1969)

[22] KEMP — Formulae for calculating the Operating Characteristic and the Average Sample Number of some sequential tests.
J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 20(1958) p 376- 386

[23] KEMP — Formal expressions wich can be used for the determination of the operating characteristic and average sample number of a simple sequential test.
J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 29(1967) p 248- 262

[24] KEMPERMAN
The general one-dimensional random walk with absorbing barriers with applications to sequential analysis.
Thèse (1950) AMSTERDAM

[25] MERIC
Test progressif de l'hypothèse que le paramètre d'une loi binomiale est voisin d'une valeur donnée.
C. R. Acad. Sc. t 237 (1953) p 1390-1392

[26] MERIC
Ajustement des constantes du test binomial de Wald permettant d'obtenir les expressions de ses caractéristiques.
C. R. Acad. Sc. t 238 (1954) p 2142-2143

[27] MERIC
Etude de la formule de Walker donnant la fonction "OC" du test binomial de Wald.
C. R. Acad. Sc. t 239 (1954) p 1117-1119

[28] MERIC
Sur une expression de la fonction K(x, y) de Polya, liée au test de Wald.
C. R. Acad. Sc. t 241 (1955) p 1255-1257

[29] MERIC
Sur la relation de récurrence de Polya liée au test de Wald.
C. R. Acad. Sc. t 241 (1955) p 1377-1380

[30] MERIC
Sur le calcul de la fonction "OC" du test binomial de Wald, à partir de la relation de récurrence de Polya.
C. R. Acad. Sc. t 245 (1957) p 1500-1502

[31] MERIC
Sur une méthode matricielle pour le calcul de la fonction "OC" du test binomial de Wald.
C. R. Acad. Sc. t 246 (1958) p 884- 887

[32] MERIC
Marche au hasard dans le plan et caractéristiques exactes du test binomial de Wald.
Thèse (1958) TOULOUSE

[33] MERIC
Sur un problème de marche au hasard dans le plan. Distribution du nombre de pas.
C. R. Acad. Sc. t 248 (1959) p 3111-3113

[34] PAGE — An improvement to Wald's approximation for some properties of sequential tests. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B 16(1954) p 136- 139

[35] PAGE — The Monte-Carlo solution of some integral equations. Proc. Camb. Phil. Soc. 50 (1954) p 414- 425

[36] POLYA — Exact formulas in the Sequential Analysis of attributes. Univ. of California. Publ. Math. NS 1 p 229 (1948)

[37] RAGHAVACHARI — Operating characteristic and expected sample size of a sequential probability ratio test for the simple exponential distribution. Calcutta Stat. Ass. Bul. 14 (1965) p 65- 73

[38] SAMUELSON — Exact distribution of continuous variables in sequential analysis. Econometrika t 16 (1948) p 191- 198

[39] SCHMITZ — Likelihoodquotienten - Sequenztests bei homogenen Markoffschen ketten. Biometrische Zeitschrift 10-4 (1968)p 231- 247

[40] SCHORR — Die exakte OC -und ASN- Funktion eines sequentiellen quotiententests im falle der exponentialverterlung. Unternchmonsforschung Dtsh (1967) 11, 3 p 173- 185

[41] SOBEL et WALD — A sequential decision procedure for choosing one of three hypotheses concerning the unknown mean of a normal distribution. Ann. Math. Stat. 20 (1949) p 502- 522

[42] TALLIS et VAGHOLKAR — Formulae to improve Wald's approximation for some properties of sequential tests. J. Roy. Stat. Soc. Ser. B (1965) Vol 27 n°1 p 74- 81

[43] WALD — Sequential Analysis. WILEY (1947)

[44] WALD et WOLFOWITZ — Optimum character of the sequential probability ratio test. Ann. Math. Stat. 19 (1948) p 326 - 329

[45] WETHERILL — Méthodes séquentielles en Statistique. DUNOD (1969)

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION p.1

CHAPITRE -I- Le test séquentiel du rapport des probabilités p.3

A. Définition du test p.3

B. Propriétés et Caractéristiques du test p.5

I Caractère fini du test p.5

II Identité fondamentale de Wald p.6

III Relations entre les constantes A, B, α, β, p.8

IV Fonction d'efficacité p.9

V Nombre moyen d'observations p.10

VI Optimalité du test p.12

VII Le test de certaines hypothèses composées p.12

CHAPITRE -II- Le test séquentiel d'hypothèses sur le paramètre d'une variable aléatoire. Caractéristiques exactes p.15

A. Méthode de WALD p.15

I Préliminaires p.15

II Caractéristiques du test p.16

B. Première méthode liée à la marche aléatoire MA 1 p.19

I Préliminaires p.19

II Quasi périodicité de la marche aléatoire MA 1 p.28

III Fonction d'efficacité p.30

IV Fonction caractéristique de N p.34

V Nombre moyen d'observations p.36

VI Application p.38

C. Méthode liée à la marche aléatoire MA 2 p. 42

I Préliminaires p. 42

II Quasi-périodicité de la marche aléatoire MA 2 p. 49

III Caractéristiques du test p. 50

IV Application p. 51

D. Seconde méthode liée à la marche aléatoire MA 1 dans le cas binomial p. 55

I Préliminaires p. 55

II Fonction d'efficacité p. 58

III Fonction caractéristique de N p. 60

IV Nombre moyen d'observations p. 62

E. Caractéristiques d'un test composé de deux tests binomiaux p. 63

I Préliminaires p. 63

II Fonction d'efficacité p. 66

III Fonction caractéristique N p. 67

IV Nombre moyen d'observations p. 69

F. Caractéristiques d'un test composé de trois tests binomiaux p. 71

I Préliminaires p. 71

II Probabilités d'acceptation des hypothèses p. 73

III Fonction caractéristique de N et nombre moyen d'observations p. 75

G. Cas des variables aléatoires continues p. 76

CHAPITRE -III- Le test séquentiel d'hypothèses sur les probabilités de transition d'une chaîne de Markov d'ordre un p. 79

A. Chaînes de Markov homogènes finies p. 80

I Premier type d'échantillonnage p. 80

I-1. Préliminaires p. 80

I-2. Caractère fini du test p. 84

I-3. Fonction d'efficacité p. 86

I-4. Fonction caractéristique de N et nombre moyen d'observations p. 88

II Deuxième type d'échantillonnage p. 89

III Troisième type d'échantillonnage p. 91

B. Chaînes de Markov non homogènes finies p. 94

C. Chaînes de Markov homogènes dénombrables p. 95

I Hypothèses distinctes pour un nombre fini de transitions p. 96

II Hypothèses distinctes pour une quantité dénombrable de transitions p. 98

CHAPITRE -IV- Caractéristiques du test séquentiel du rapport des probabilités appliqué à certains processus aléatoires continus dans le temps p. 99

A. Résultats de DVORETZKY, KIEFER et WOLFOWITZ p. 99

B. Test d'hypothèses sur le paramètre d'un processus de Poisson p. 100

I Préliminaires p. 101
II Fonction d'efficacité p. 104
III Fonction caractéristique de T p. 104
IV Temps moyen d'observation p. 107
V Généralisation p. 108

C. Test séquentiel du rapport des probabilités appliqué aux processus de naissance et mort p. 109

I Processus de naissance linéaire p. 109
II Processus de mort linéaire p. 112
III Processus de naissance et mort linéaire p. 114

D. Caractéristiques exactes du test séquentiel du rapport des probabilités sur le paramètre d'une variable aléatoire exponentielle p. 115

I Echantillonnage classique p. 115
II Echantillonnage par groupe avec ou sans remplacement p. 117

II-1. Echantillonnage avec remplacement p. 117
II-2. Echantillonnage sans remplacement p. 118